

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY



Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

1710 1

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME VINGT-QUATRIÈME. — ANNÉE 1896.

PARIS.
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ.

7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7

1896

155284
15/6/20

QA

I

S59

t.24-25

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

MM.		MM.	
1873	CHASLES.	1885	APPELL.
1874	LAFFON DE LADÉBAT.	1886	POINCARÉ.
1875	BIENAYMÉ.	1887	FOURET.
1876	DE LA GOURNERIE.	1888	LAISANT.
1877	MANNHEIM.	1889	DÉSIRÉ ANDRÉ.
1878	DARBOUX.	1890	HATON DE LA GOUPILLIÈRE.
1879	O. BONNET.	1891	COLLIGNON.
1880	JORDAN.	1892	VICAIRE.
1881	LAGUERRE.	1893	HUMBERT.
1882	HALPHEN	1894	PICQUET.
1883	ROUCHE.	1895	GOURSAT.
1884	PICARD.	1896	KÖNIGS.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

- BERDELLÉ, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
RIOCHE, professeur de mathématiques, à Paris.
BISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut, à Paris.
BROCARD, chef de bataillon du génie en retraite, à Bar-le-Duc (Meuse).
CANET, ingénieur civil, à Paris.
CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, à Paris.
FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Paris.
GAUTHIER-VILLARS, imprimeur-éditeur, à Paris.
HALSTED, professeur à l'Université, à Austin (Texas).
HATON DE LA GOUILLIÈRE, membre de l'Institut, à Paris.
HERMITE, membre de l'Institut, à Paris.
LÉAUTÉ, membre de l'Institut, à Paris.
JORDAN, membre de l'Institut, à Paris.
MANHEIM, professeur à l'École Polytechnique, à Paris.
DE MENDIZABAL TAMBOREL, à Mexico.
MERCERAT, licencié ès sciences mathématiques, à Paris.
D'OCAGNE, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
PEROTT (Joseph), à Worcester (Massachusetts).
PERRIN, ingénieur en chef des mines, au Mans (Sarthe).
POINCARÉ, membre de l'Institut, à Paris.
POLIGNAC (prince C. DE), à Grasse (Alpes-Maritimes).
RAFFY, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris.
SILOW, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norwège).
TANNERY (Paul), directeur des manufactures de l'État, à Paris.
TARRI, inspecteur des contributions diverses, à Alger.
-

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1896 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau	{	MM. BERTRAND. CREMONA. DARBOUX. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. HERMITE. JORDAN.
--------------------------------------	---	--

Président	MM.	KOENIGS.
Vice-Présidents	{	DE COMBEROUSSE. GUYOU. PICARD. POINCARÉ.
Secrétaires	{	CARVALLO. RAFFY.
Vice-Secrétaires	{	L. LÉVY. PAINLEVÉ.
Archiviste		BIOCHE.
Trésorier		CLAUDE-LAFONTAINE.

Membres du Conseil ⁽²⁾	{	ANDRÉ, 1899. APPELL, 1897. FOURET, 1899. GOURSAT, 1898. HUMBERT, 1898. LAISANT, 1898. LECORNU, 1897. MANNHEIM, 1897. D'OCAGNE, 1898. PICQUET, 1897. ROUCHE, 1899. VICAIRE, 1899.
---	---	---

⁽¹⁾ MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

⁽²⁾ La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission.

1872. ACHARD, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 *bis*, à Paris.
1893. ADAM (Paul), ingénieur des ponts et chaussées, docteur ès sciences mathématiques, avenue de Villars, 2, à Paris.
1881. AMIGUES, professeur au lycée, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1894. ANDRADE, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Poullain-Duparc, 7, à Rennes (Ile-et-Vilaine).
1872. ANDRÉ (Désiré), docteur ès sciences mathématiques, rue Vauquelin, 28, à Paris.
1890. ANTONARI, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée Carnot, rue Daubigny, 11 *bis*, à Paris.
1879. APPELL, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue Le Verrier, 6, à Paris.
1892. ARNOUX (G.), ancien officier de marine, aux Mées (Basses-Alpes).
1881. ASTOR, professeur à la Faculté des Sciences, place Victor-Hugo, 11, à Grenoble (Isère).
1882. AUTONNE, ingénieur des ponts et chaussées, rue Mont-Bernard, 9, à Lyon (Rhône).
1894. BALITRAND, lieutenant du génie, à Tunis (Tunisie).
1889. BEGHIN (Maurice), ancien élève de l'École Polytechnique, rue de Bourgogne, 40, à Paris.
1875. BERDELLÉ, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
1873. BERTRAND (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, membre de l'Académie française, rue de Tournon, 4, à Paris.
1895. BEUDON, agrégé-préparateur à l'École normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.
1872. BIENAYMÉ (Arthur), directeur du matériel au Ministère de la Marine, à Paris.
1888. BIOCHE, professeur au collège Stanislas, rue Vavin, 5, à Paris.
1875. BISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut, rue Taitbout, 3, à Paris.
1890. BIERKES, professeur à l'Université à Stockholm (Suède).
1891. BLITEL, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée Saint-Louis, rue Claude-Bernard, 65, à Paris.
1892. BONAPARTE (prince Roland), avenue d'Iéna, 10, à Paris.
1895. BOREL (Ém.), maître de conférences à la Faculté des Sciences, place Jeanne-d'Arc, 13, à Lille (Nord).
1886. BRAULT DE BOERXONVILLE, boulevard de Talence, 159, à Bordeaux (Gironde).
1874. BRIOSCHI, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École Polytechnique, à Milan (Italie).
1872. BRISSE (Ch.), professeur à l'École Centrale, rue Vauquelin, 18, à Paris.
1873. BROCARD, chef de bataillon du génie en retraite, Ville-Haute, 75, à Bar-le-Duc (Meuse).
1886. BRUNEL, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1893. BURKHARDT, privat-docent à l'Université, Grüner Weg, 4, à Göttingue (Allemagne).
1894. CAMEN, professeur au lycée Condorcet, avenue d'Orléans, 7, à Paris.
1893. CALDABERA, professeur à l'Université, via Maqueda, 230, à Palerme (Italie).
1888. CANET (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie à la Société des Forges de la Méditerranée, rue Vignon, 3, à Paris.
1885. CARON, professeur de géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 82, à Paris.
1892. CARONNET, docteur ès sciences mathématiques, rue Barye, 10, à Paris.
1887. CARVALLO, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue de Courty, 1, à Paris.
1887. CASPARY, professeur à l'École d'Architecture, Genthinerstrasse, 12, à Berlin (Allemagne).

Date
de
l'admission.

1890. CEDENCREITZ (baronne Nanny, née de Lagerborg), Georgsgatan, 22, à Helsingfors (Finlande).
1892. CELLÉRIER (Gustave), boulevard de Port-Royal, 48, à Paris.
1887. CERRUTI, professeur à l'Université, rue d'Azeglio, 16, à Rome (Italie).
1888. CHAILAN (Edouard), rue Berthollet, 14, à Paris.
1893. CHARLIAT, ingénieur des arts et manufactures, rue de Paradis, 46, à Paris.
1881. CHEMIN, ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue Montaigne, 33, à Paris.
1884. CHRYSTAL, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
1875. CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris.
1872. COLLIGNON, inspecteur général des ponts et chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.
1890. COLOT, villa Sully, à Arcachon (Gironde).
1875. COMBEROISSE (DE), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Centrale, rue Saint-Lazare, 94, à Paris.
1872. COURCELLES, ancien professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
1884. CRAIG (Thomas), professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1877. CREMONA, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome (Italie).
1872. DARROUX, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
1885. DAUTHVILLE, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1881. DEFFORGES, chef de bataillon d'infanterie, attaché à l'Etat-major du Ministre de la Guerre, boulevard Latour-Maubourg, 41, à Paris.
1882. DELANNOY, sous-intendant militaire en retraite, à Guéret (Creuse).
1895. DELAUNAY (N.), professeur à l'Institut agronomique, à Novo-Alexandria (Russie).
1885. DEMARTRES, doyen de la Faculté des Sciences, à Lille (Nord).
1892. DEMOULIN (Alph.), docteur en sciences mathématiques et physiques, répétiteur à l'Université, place Laurent, 10, à Gand (Belgique).
1895. DERMENGHEM, licencié ès sciences, rue de Miromesnil, 4, à Paris.
1883. DERUYTS, docteur ès sciences, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
1894. DESMONT, licencié ès sciences mathématiques, place Corneille, 10, à Levallois-Perret (Seine).
1886. DUCAN, professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1895. DUPORCQ, ingénieur des télégraphes, rue Jacob, 58, à Paris.
1872. DURANDE, doyen de la Faculté des Sciences, à Poitiers (Vienne).
1885. DYCK (Walther), professeur au Polytechnicum, à Munich (Bavière).
1888. FABRY, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1891. FAQUEMMEGUE, professeur au lycée de la Rochelle.
1892. FEHR (Henri), *privat-docent* à l'Université, rue Gevrey, 15, à Genève (Suisse).
1885. FIELOS (John), professeur de mathématiques, Friedlaenderweg, 31, à Göttingue (Allemagne).
1893. FLEURY, ancien chef d'institution, rue de la Santé, 46, à Paris.
1881. FLEQUET, professeur à la Faculté des Sciences, rue Saint-Lambert, 17, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).

Date
de
l'admission.

1872. FLYE SAINT-MARIE, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1895. FONTÈS, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Romégnières, 3, à Toulouse (Haute-Garonne).
1891. FONTVIOLENT (DE), professeur à l'École Centrale, rue d'Erlanger, 29, Paris-Auteuil.
1889. FOUCHÉ, professeur de mathématiques, rue Soufflot, 5, à Paris.
1872. FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris.
1892. FROLOY (le général), quai Pierre-Fatio, 10, à Genève (Suisse).
1872. GABRIEL, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris.
1872. GAUTHIER-VILLARS, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris.
1872. GENTY (E.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Oran (Algérie).
1890. GENTY (Max), enseigne de vaisseau, en escadre, à Toulon (Var).
1893. GÉRAUD, docteur ès sciences, professeur au lycée, à Lyon (Rhône).
1890. GERBALDI, professeur à l'Université, via Daita, 11, à Palerme (Italie).
1881. GOURSAT, maître de conférences à l'École Normale supérieure, boulevard Arago, 112, à Paris.
1880. GICCIA (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Italie).
1891. GUINARAES, officier du génie, à l'Académie des Sciences, rue Arco de Jesus, à Lisbonne (Portugal).
1881. GUNTHER (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. GUYOU, membre de l'Institut, capitaine de frégate, rue de l'Université, 13, à Paris.
1873. HAAG, ingénieur en chef des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 11 bis, à Paris.
1882. HABICH, directeur de l'École des mines, à Lima (Pérou).
1894. HALSTED, professeur à l'Université du Texas, Guadalupe Street, 2407, à Austin (Texas).
1872. HATON DE LA GOUPIILLIÈRE, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur de l'École des mines, boulevard Saint-Michel, 60, à Paris.
1872. HENRY, inspecteur général des ponts et chaussées, boulevard St-Germain, 22, à Paris.
1882. HENRY (Charles), bibliothécaire à la Sorbonne, rue Jean-de-Beauvais, 2, à Paris.
1892. HERMANN, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris.
1873. HERMITE, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris.
1893. HOLUX, professeur en retraite, rue des Fosses Saint-Jacques, 16, à Paris.
1879. HOLST (Elling), professeur à l'École Polytechnique, Pilestrade, 19, à Christiania (Norvège).
1895. HOTT (Stanislas), licencié ès sciences, rue Malebranche, 17, à Paris.
1872. HOUEGANT, chef de bataillon du génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
1880. HUBERT, ingénieur des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue de l'Arcade, 24, à Paris.
1881. IMBER, directeur des études à l'École Centrale, rue Montgolfier, 1, à Paris.
1887. ISSALY (l'abbé), rue Margaux, 16, à Bordeaux (Gironde).
1873. JAVIV, chef d'escadron au 15^e régiment d'artillerie, à Douai (Nord).
1872. JAVARY, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris.

Date
de
l'admission.

1872. JORDAY, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varenne, 48, à Paris.
1872. JOUFFRET, lieutenant-colonel d'artillerie, rue Carnot, 24, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
1875. JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur, via Principe Umberto, 7, à Milan (Italie).
1890. KÖBB (Gustaf), maître de conférences à l'Université de Stockholm (Suède).
1892. KOCH (H. von), maître de conférences à l'Université, Engelbrektsgatan, 43 B, à Stockholm (Suède).
1880. KÖNIGS, professeur adjoint à la Faculté des Sciences, professeur suppléant au Collège de France, boulevard de Port-Royal, 72, à Paris.
1881. LACOR, professeur de mathématiques, boulevard du Mont-Parnasse, 96, à Paris.
1873. LAISANT, docteur ès sciences mathématiques, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris.
1893. LANCELIN, boulevard Arago, 97, à Paris.
1875. LAQUIÈRE, ancien capitaine d'artillerie, rue Edgard-Quinet, 19, à Mustapha (Algérie).
1873. LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
1880. LÉAUTÉ, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris.
1893. LECORNU, ingénieur en chef des mines, boulevard du Mont-Parnasse, 12, à Paris.
1895. LÉMERAY, ingénieur des constructions navales, villa des Troènes, à la Seyne-sur-Mer, par Toulon (Var).
1872. LEMOINE (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Littré, 5, à Paris.
1879. LE PAIGE, professeur à l'Université, à l'observatoire de Cointe, à Liège (Belgique).
1891. LERY, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1872. LESPIAULT, doyen honoraire de la Faculté des Sciences de Bordeaux, à Nérac (Lot-et-Garonne).
1882. LÉVY (Lucien), examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue de Condé, 29, à Paris.
1872. LÉVY (Maurice), membre de l'Institut, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur au Collège de France, avenue du Trocadéro, 15, à Paris.
1875. LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1873. LIGUINE, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
1877. LINDEMANN, professeur à l'Université, Georgenstrasse, 40, à Munich (Bavière).
1886. LIOTVILLE, ingénieur des poudres, répétiteur à l'École Polytechnique, rue des Écoles, 6 bis, à Paris.
1880. LORIN, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Faubourg-Saint-Honoré, 186, à Paris.
1888. LUCAS (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Freycinet, 26, à Paris.
1886. LYON, docteur ès sciences mathématiques, chemin de la Roseraie, 26, à Genève (Suisse).
1882. MACÉ DE LÉPINAY, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV, rue Claude-Bernard, 63, à Paris.
1895. MAILLET, docteur ès sciences, ingénieur des ponts et chaussées, à Toulouse (Haute-Garonne).
1875. MALLOIZEL, professeur de mathématiques, rue de l'Estrapade, 7, à Paris.
1892. MANGEOT, docteur ès sciences mathématiques, quai des Comtes de Champagne, 30, à Troyes (Aube).
1872. MANNHEIM, colonel d'artillerie en retraite, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris.

Date
de
l'admission

1884. MARTIN (Artemas), U. S. Coast and geodesic Survey Office, Washington D. C. (Etats-Unis d'Amérique).
1889. MARTIN (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, rue du Mont-Parnasse, 25, à Paris.
1890. MASSIEU, inspecteur général des mines, avenue d'Antin, 18, à Paris.
1894. MAUPIN, surveillant général au lycée, à Nantes (Loire-Inférieure).
1889. MENDIZABAL TAMBOREL (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique).
1884. MERCEREAU, licencié ès sciences, rue Gay-Lussac, 49, à Paris.
1893. MICHEL (François), rue du Faubourg-Saint-Denis, 65, à Paris.
1873. MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1872. MOUTARD, inspecteur général des mines, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1888. MUKHOPADHYAY (Asutosh), professeur de Mathématiques, Russa Road, 77, North Bhowanipore, à Calcutta (Inde).
1885. NEUBERG, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1882. OCAGNE (p'), ingénieur des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Vienne, 5, à Paris.
1873. OYDIO (Enrico p'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1893. PAINLEVÉ, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue de Rennes, 99, à Paris.
1888. PAPELIER (Georges), professeur de mathématiques spéciales au lycée, rue de Recouvrance, 20, à Orléans (Loiret).
1884. PARAF, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
1872. PARMENTIER, général du génie en retraite, rue du Cirque, 5, à Paris.
1872. PARRAN, ingénieur en chef des mines, rue des Saints-Pères, 56, à Paris.
1884. PAUTONNIER (l'abbé), professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 19, à Paris.
1881. PELLET, doyen de la Faculté des Sciences, rue Ballainvilliers, 7, à Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).
1883. PELLETREAU, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Constantine (Algérie).
1874. PERCIN, lieutenant-colonel d'artillerie, inspecteur des manufactures d'armes, rue de Vaugirard, 20, à Paris.
1881. PEROTT (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts).
1873. PERRIN, ingénieur en chef des mines, rue Joinville, 2, au Mans (Sarthe).
1892. PERRIV (Élie), professeur de mathématiques, rue Lamandé, 7, à Paris.
1887. PEZZO (DEL), professeur à l'Université, via Gennaro Serra, 75, à Naples (Italie).
1879. PICARD (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue Soufflot, 13, à Paris.
1872. PICQUET, chef de bataillon du génie, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue de Condé, 24, à Paris.
1882. POINCARÉ, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris.
1882. POKORNY Martin, directeur du lycée communal, à Prague (Bohême).
1872. POLIGNAC (prince G. de), villa Jessie, à Cannes (Alpes-Maritimes).
1877. POUSSET, professeur au lycée, à Poitiers (Vienne).
1877. PRESLE (m), sous-intendant militaire en retraite, rue Monge, 81, à Paris.

Date
de
admission.

1872. **PLTZ**, général d'artillerie en retraite, rue Saint-Merry, 98, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
1872. **RADAI**, rue de Tournon, 12, à Paris.
1883. **RAFFA**, maître de conférences à la Faculté des Sciences et à l'École Normale supérieure, rue Nicole, 7, à Paris.
1893. **RIVIEREAU** (l'abbé), professeur à l'Institut catholique, à Angers (Maine-et-Loire).
1888. **ROMY** (Gustave), docteur ès sciences mathématiques, rue Chanoinesse, 2, à Paris.
1872. **ROUART**, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.
1872. **ROICHÉ** (Eugène), professeur au Conservatoire des arts et métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
1885. **ROIQUET**, professeur de mathématiques spéciales au lycée, place de l'École-d'Artillerie, 2, à Toulouse (Haute-Garonne).
1881. **SAINT-PAUL** (DUCUP DE), lieutenant-colonel d'artillerie en retraite, rue Saint-Sauveur, 13, à Perpignan (Pyrénées-Orientales).
1889. **SARAZ**, professeur de mathématiques, rue Saint-Jacques, 220, à Paris.
1872. **SABRAU**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des poudres, professeur à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 bis, à Saint-Mande (Seine).
1872. **SARTIEX**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. **SAUVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1881. **SCHLEGEL** (Dr Victor), professeur à l'École technique, Volmestrasse, 62, à Hagen (Allemagne).
1881. **SCHOETE**, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1882. **SÉLIVANOFF** (Demetrius), attaché à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
1883. **SIMART**, lieutenant de vaisseau, répétiteur à l'École Polytechnique, examinateur d'admission à l'École navale, place Possoz, 5, à Paris.
1881. **STAROKOFF** (Alexis), professeur à l'École de commerce, Deribasowskaja, 6, à Odessa (Russie).
1879. **STEPHANOS** (Dr Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
1873. **STUDNICKA**, professeur à l'Université, à Prague (Bohême).
1872. **SYLOW**, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norvège).
1872. **TANNERY** (Paul), directeur des manufactures de l'État, square du Roule, 2, Paris.
1875. **TANNERY** (Jules), sous-directeur à l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.
1882. **TARRY** (Gaston), inspecteur des Contributions diverses, à Kouba, près Alger.
1872. **TERRIER**, professeur au collège Chaptal, rue Larribe, 3, à Paris.
1872. **TISSERAND**, membre de l'Institut, directeur de l'Observatoire, à Paris.
1873. **TISSOT**, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Voreppe (Isère).
1893. **TOUCHE**, lieutenant-colonel d'artillerie territoriale, rue de Téhéran, 24, à Paris.
1872. **TRESCA**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, boulevard Inkermann, 27, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1893. **YALLÉE-POUSSIN** (Ch.-J. DE LA), professeur à l'Université, rue de Namur, 190, à Louvain (Belgique).
1880. **VANECEK** (J.-S.), professeur au lycée, à Jicin (Bohême).
1890. **VASCHY**, répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Bosquet, 68, à Paris.
1876. **VICAIRE**, inspecteur général des mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.

Date
de
l'admission

1888. VITO VOLTERRA, professeur à l'Université, à Pise (Italie).
1893. WAGNER, professeur à l'École J.-B. Say, rue Pierre Charron, 1, à Paris.
1880. WALCKENAER, ingénieur des mines, boulevard Saint-Germain, 218, à Paris.
1879. WEILL, professeur au collège Chaptal, 19, rue Thiers, au Vésinet (Seine-et-Oise).
1873. WEYR (D^e Edouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohême).
1878. WORMS DE ROMILLY, ingénieur en chef des mines, rue Balzac, 7, à Paris.
1882. ZARODSKI, membre du Comité d'artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie, à Saint-Petersbourg (Russie).
1890. ZAREMKA, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée, rue des Fours à chaux, 25, à Nîmes (Gard).
1881. ZEUTHEN, professeur à l'Université, Ostergade, 10, à Copenhague (Danemark).
-

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	<i>Revue semestrielle des publications mathématiques</i> (rédacteur M. Coelingh, Stadhouderskade, 48).	Hollande.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics</i> , publié par l'Université John Hopkins (rédacteur M. Thomas Craig).	États-Unis d'Amérique.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Archiv für Mathematik und Physik</i> (rédacteur Dr Hoppe, Prinzenstrasse, 69. S. W.).	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik</i> (rédacteur Dr Lampe, Kurfürstenstrasse, 139).	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik</i> (rédacteur M. Fuchs, Kronprinzen Ufer, 24).	Allemagne.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.....	Société philosophique de Cambridge.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab</i> , chez M. Gammeneyer, libraire, Carl Johans Gade, 33, à Christiania.	Norvège.
Coimbre.....	<i>Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas</i> (rédacteur M. Gomes Teixeira).	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik</i> (rédacteurs MM. Foldberg et Juel).	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Ecole Polytechnique de Delft.	Hollande.
Dresde.....	<i>Zeitschrift für Mathematik und Physik</i> (rédacteur Dr Oscar Schlömilch).	Allemagne.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	<i>Mathesis</i> (rédacteurs MM. Mansion, à Gand, et Neuberg, à Liège).	Belgique.
Goettingue.....	Société Royale des Sciences de Goettingue.	Allemagne.
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Russie.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkov.....	Annales de l'Université.	Russie.

Kharkov.....	Société mathématique de Kharkov.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen</i> (rédacteur M. Félix Klein, à Goettingue).	Allemagne.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg.....	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.</i>	France.
Mexico.....	Société científica <i>Antonio Alzate.</i>	Mexique.
Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis d'Amérique.
Odessa.....	Société mathématique d'Odessa.	Russie.
Palerme.....	<i>Rendiconti del Circolo matematico.</i>	Italie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences, à Paris.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques</i> (rédacteurs MM. Darboux et J. Tannery).	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique.</i>	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques élémentaires</i> (rédacteur M. G. de Longchamps).	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques spéciales</i> (rédacteur M. G. de Longchamps).	France.
Paris.....	Institut des Actuaire français.	France.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise.....	<i>Il Nuovo Cimento.</i>	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Prague.	Autriche.
Prague.....	<i>Casopis pro pestování matematiky a fyziky</i> (rédacteur M. Edouard Weyr).	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Prague.	Autriche.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincci.</i>	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm.....	<i>Acta Mathematica</i> (rédact. M. Mittag-Leffler).	Suède.
Toulon.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Toulon.</i>	France.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Venise.....	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik</i> , (rédact. M. Escherich).	Autriche.
Zurich.....	Société des Sciences naturelles de Zurich.	Suisse.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 8 JANVIER 1896.

PRÉSIDENCE DE M. GOURSAT.

La Société, réunie en assemblée générale, procède au renouvellement de son bureau et à l'élection de membres du Conseil.

Communications :

M. RAFFY : *Sur deux classes de surfaces analogues aux surfaces tétraédrales.*

M. Kœnigs : *Sur les invariants intégraux.*

M. FOURET présente, au nom des Comités des Compagnies d'assurances sur la vie, des Tables de mortalité.

SÉANCE DU 22 JANVIER 1896.

PRÉSIDENCE DE M. KOENIGS.

Communications :

M. LECORNU : *Sur l'équilibre d'une enveloppe ellipsoïdale soumise à une pression intérieure constante.*

M. L. LÉVY : *Sur les familles de surfaces triplement orthogonales à trajectoires sphériques pour une famille.*

M. DUPORCQ : *Sur la construction du huitième point commun aux quadriques qui passent par sept points.*

M. ZAREMBA adresse une *Contribution à la théorie de la fonction de Green*.

M. D'OCAGNE présente un opuscule de M. Frédéric Ritter sur la vie et les œuvres de Viète.

A la suite de cette Communication, la Société émet à l'unanimité le vœu que le Gouvernement ordonne la publication des OEuvres de Viète, réunies par M. Frédéric Ritter.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR DEUX CLASSES DE SURFACES ANALOGUES AUX SURFACES TÉTRAÉDRALES;

Par M. L. RAFFY.

On appelle *surfaces tétraédrales* les surfaces représentées en coordonnées cartésiennes par les formules

$$\begin{aligned}x &= A(u-a)^m(v-a)^m, \\y &= B(u-b)^m(v-b)^m, \\z &= C(u-c)^m(v-c)^m,\end{aligned}$$

dans lesquelles u et v désignent deux paramètres variables, les autres lettres des constantes. Il est bien connu que les courbes $u = \text{const.}$ et les courbes $v = \text{const.}$ tracent sur ces surfaces un réseau conjugué.

I.

1. Je considère les surfaces représentées par les formules plus générales

$$(1) \quad x = U_1(u) V_1(v), \quad y = U_2(u) V_2(v), \quad z = U_3(u) V_3(v),$$

les fonctions U_i et V_i étant telles que les courbes $u = \text{const.}$ et les courbes $v = \text{const.}$ forment un réseau conjugué.

Je vais déterminer toutes les surfaces ainsi définies et je montrerai que, pour chacune d'elles, les lignes asymptotiques sont déterminées par deux quadratures.

2. Une surface étant rapportée à des coordonnées curvilignes u, v , pour que les courbes coordonnées forment un réseau conjugué, il faut et il suffit, comme on sait, que le déterminant

$$D' = \begin{vmatrix} x''_{uv} & x'_u & x'_v \\ y''_{uv} & y'_u & y'_v \\ z''_{uv} & z'_u & z'_v \end{vmatrix}$$

soit identiquement nul. Si nous désignons les dérivées par des accents, cette condition deviendra, pour les surfaces considérées,

$$(2) \quad D' = \begin{vmatrix} U'_1 V'_1 & U'_1 V_1 & U_1 V'_1 \\ U'_2 V'_2 & U'_2 V_2 & U_2 V'_2 \\ U'_3 V'_3 & U'_3 V_3 & U_3 V'_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Débarrassons-nous d'abord d'un cas particulier, celui où l'une des six dérivées qui figurent dans cette équation se réduirait à zéro. Soit, par exemple, $U'_3 = 0$. Si l'on écarte l'hypothèse $U_3 V'_3 = 0$, qui ne donnerait que le plan, il reste

$$U'_1 U'_2 (V'_1 V_2 - V_1 V'_2) = 0.$$

Si l'on égale à zéro l'une des fonctions V , on trouve un plan; si l'une des dérivées U'_1, U'_2 est nulle, la surface est un cylindre.

La supposition

$$\frac{V'_2}{V_2} = \frac{V'_1}{V_1}$$

conduit aux surfaces

$$(3) \quad x = U_1 V_1, \quad y = U_2 V_1, \quad z = V_3,$$

qui sont bien connues. Peterson a donné dès 1866, dans le *Journal de la Société mathématique de Moscou*, des déformations à un paramètre pour toutes ces surfaces. Plus récemment, M. Janet (*Annales de l'École Normale supérieure*, année 1887) a étudié des surfaces qui ne diffèrent de celles-là que par une transformation projective et montré que leurs lignes asymptotiques sont déterminées par deux quadratures. En effet, les équations (3) peuvent être remplacées par les suivantes

$$(4) \quad \frac{y'}{x} = u, \quad x = \frac{f(z)}{z'(u)},$$

d'où l'on déduit, pour les asymptotiques, l'équation différentielle

$$\frac{f''(z)}{f(z)} dz^2 - \frac{z''(u)}{z'(u)} du^2 = 0.$$

3. Nous pouvons maintenant supposer qu'aucune des six dérivées $U'_1, \dots, V'_3$ ne se réduit à zéro, ce qui permet d'écrire ainsi l'équation du problème

$$(6) \quad \begin{vmatrix} 1 & \frac{V_1}{V'_1} & \frac{U_1}{U'_1} \\ 1 & \frac{V_2}{V'_2} & \frac{U_2}{U'_2} \\ 1 & \frac{V_3}{V'_3} & \frac{U_3}{U'_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette équation est une somme de trois termes de la forme UV . En le différentiant deux fois par rapport à u , on obtient deux équations qui, jointes à la première, permettent d'éliminer les trois fonctions V . On arrive ainsi à la relation qui exprime que les trois fonctions U sont solutions d'une même équation différentielle linéaire, homogène et du second ordre. On a donc nécessairement

$$(7) \quad \frac{U_i}{U_j} = a_i f(u) + z_i z(u) \quad (i = 1, 2, 3)$$

et, pour les mêmes raisons,

$$(8) \quad \frac{V_i}{V_j} = b_i l(v) + \beta_i \lambda(v) \quad (i = 1, 2, 3),$$

les lettres a et b , z et β désignant des constantes, les symboles f , z , l et λ , des fonctions arbitraires.

D'après cela, trois cas peuvent se présenter et trois seulement : 1° les trois fonctions (7) sont proportionnelles entre elles, ainsi que les trois fonctions (8); 2° les trois fonctions (7) sont proportionnelles entre elles, mais les trois fonctions (8) ne le sont point; 3° ni les fonctions (7), ni les fonctions (8) ne sont proportionnelles entre elles.

4. *Premier cas.* — Nous supposons qu'on ait à la fois

$$(9) \quad m_1 \frac{U_1}{U_1'} = m_2 \frac{U_2}{U_2'} = m_3 \frac{U_3}{U_3'} = \frac{U}{U'},$$

$$(10) \quad n_1 \frac{V_1}{V_1'} = n_2 \frac{V_2}{V_2'} = n_3 \frac{V_3}{V_3'} = \frac{V}{V'},$$

les lettres m et n désignant des constantes, U une fonction de u , et V une fonction de v . De ces relations on déduit, en négligeant des facteurs de proportionnalité qui sont sans influence,

$$x = U^{m_1} V^{n_1}, \quad y = U^{m_2} V^{n_2}, \quad z = U^{m_3} V^{n_3}.$$

A la vérité, les exposants m et n ne sont pas entièrement arbitraires, car la substitution des expressions (9) et (10) dans l'équation (6) conduit à une relation quadratique et homogène entre les inverses de ces exposants. Mais, comme il existe toujours trois nombres α , β , γ satisfaisant aux relations

$$\alpha m_1 + \beta m_2 + \gamma m_3 = 0,$$

$$\alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3 = 0,$$

les surfaces que nous venons d'obtenir auront pour équation

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = \text{const.}$$

Ainsi, elles rentrent visiblement dans le type (4) précédemment obtenu, ce qui nous dispense d'insister davantage.

5. *Second cas.* — Nous supposons qu'on ait encore

$$(9) \quad m_1 \frac{U_1}{U_1'} = m_2 \frac{U_2}{U_2'} = m_3 \frac{U_3}{U_3'},$$

mais qu'*aucun* des rapports des trois fonctions (8), prises deux à deux, ne soit constant.

En vertu de l'hypothèse actuelle et des formules générales (8), l'équation (6) devient

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{m_1} & b_1 l(v) + \beta_1 \lambda(v) \\ 1 & \frac{1}{m_2} & b_2 l(v) + \beta_2 \lambda(v) \\ 1 & \frac{1}{m_3} & b_3 l(v) + \beta_3 \lambda(v) \end{vmatrix} = 0,$$

C'est là une relation linéaire et homogène à coefficients constants entre les deux fonctions $l(v)$ et $\lambda(v)$. Puisque leur rapport n'est pas constant, il faut que le coefficient de $l(v)$ et celui de $\lambda(v)$ soient séparément nuls; d'où

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{m_1} & b_1 \\ 1 & \frac{1}{m_2} & b_2 \\ 1 & \frac{1}{m_3} & b_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{m_1} & \beta_1 \\ 1 & \frac{1}{m_2} & \beta_2 \\ 1 & \frac{1}{m_3} & \beta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ces équations donnent

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{b}{m_1} + c, & b_2 &= \frac{b}{m_2} + c, & b_3 &= \frac{b}{m_3} + c, \\ \beta_1 &= \frac{\beta}{m_1} + \gamma, & \beta_2 &= \frac{\beta}{m_2} + \gamma, & \beta_3 &= \frac{\beta}{m_3} + \gamma, \end{aligned}$$

les lettres b, c, β, γ désignant des arbitraires ⁽¹⁾. Il vient alors

$$\frac{V_1}{V_1} = c l(v) + \gamma \lambda(v) + \frac{b l(v) + \beta \lambda(v)}{m_1},$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{V_1}{V_1} = \psi(v) + \frac{\chi(v)}{m_1},$$

en représentant par $\psi(v)$ et $\chi(v)$ deux nouvelles fonctions arbitraires. On déduit de là

$$\frac{dV_1}{V_1} = \frac{m_1 dv}{\psi(v) \left[m_1 + \frac{\chi(v)}{\psi(v)} \right]}.$$

Mais on peut prendre pour variable le rapport $\chi : \psi$, qui, en vertu de notre hypothèse, ne se réduit certainement pas à une constante; si nous l'appelons encore v , nous trouverons

$$(10) \quad V_1 = e^{m_1 \int \frac{g(v) dv}{v + m_1}}.$$

(1) Nous négligeons ainsi que la solution $m_1 = m_2 = m_3$, qui conduirait à des cônes.

Les expressions des fonctions V_2 et V_3 ne différeront de celle-là que par l'indice de m et, comme les relations (9) donnent

$$U_1 = U^{m_1}, \quad U_2 = U^{m_2}, \quad U_3 = U^{m_3},$$

nous obtenons finalement les formules

$$(11) \quad x = u^{m_1} e^{m_1 \int \frac{g(v)dv}{v+m_1}}, \quad y = u^{m_2} e^{m_2 \int \frac{g(v)dv}{v+m_2}}, \quad z = u^{m_3} e^{m_3 \int \frac{g(v)dv}{v+m_3}},$$

qui dépendent d'une seule fonction arbitraire $g(v)$ et de trois constantes arbitraires m_1, m_2, m_3 ; car nous avons pu, sans restreindre la généralité, remplacer U par la variable u .

Les surfaces que nous venons d'obtenir n'ont pas encore été signalées, que je sache.

Proposons-nous d'obtenir leurs lignes asymptotiques. A cet effet, nous formerons les deux déterminants

$$D = \begin{vmatrix} x''_{u^2} & x'_{u^2} & x'_{v^2} \\ y''_{u^2} & y'_{u^2} & y'_{v^2} \\ z''_{u^2} & z'_{u^2} & z'_{v^2} \end{vmatrix}, \quad D'' = \begin{vmatrix} x''_{v^2} & x'_{v^2} & x'_{v^2} \\ y''_{v^2} & y'_{v^2} & y'_{v^2} \\ z''_{v^2} & z'_{v^2} & z'_{v^2} \end{vmatrix}.$$

Le calcul, effectué au moyen des formules (11), donne

$$D = \frac{m_1 m_2 m_3 x y z g'(v)}{u^3 (v+m_1)(v+m_2)(v+m_3)} \sum m_1 m_2 (m_1 - m_2),$$

$$D'' = - \frac{m_1 m_2 m_3 x y z g^2(v) [v g'(v) + 1]}{u (v+m_1)^2 (v+m_2)^2 (v+m_3)^2} \sum m_1 m_2 (m_1 - m_2).$$

Comme le déterminant D' est nul, les courbes coordonnées étant conjuguées, l'équation différentielle des asymptotiques

$$(12) \quad D du^2 + D' dv^2 = 0$$

se réduit ici à

$$\frac{du^2}{u^2} - \frac{g'(v) [v g'(v) + 1] dv^2}{(v+m_1)(v+m_2)(v+m_3)} = 0.$$

On voit qu'elle est de la forme

$$F(u) du^2 - \Phi(v) dv^2 = 0.$$

En conséquence, les lignes asymptotiques des surfaces (11) sont déterminées par deux quadratures.

6. *Troisième cas.* — Nous supposons que les fonctions $U_i : U'_i$ ne sont point proportionnelles entre elles, non plus que les fonctions $V_i : V'_i$. Par suite, les fonctions $f(u)$ et $\varphi(u)$, qui figurent dans les formules (7) ne sont pas dans un rapport constant, non plus que les fonctions $l(v)$ et $\lambda(v)$ des formules (8). Or, si l'on substitue les expressions (7) et (8) dans l'équation (6), on trouve

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 l(v) + \beta_1 \lambda(v) & a_1 f(u) + \alpha_1 \varphi(u) \\ 1 & b_2 l(v) + \beta_2 \lambda(v) & a_2 f(u) + \alpha_2 \varphi(u) \\ 1 & b_3 l(v) + \beta_3 \lambda(v) & a_3 f(u) + \alpha_3 \varphi(u) \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette identité étant linéaire et homogène en $f(u)$ et $\varphi(u)$, il faut que le coefficient de $f(u)$ et celui de $\varphi(u)$ soient nuls, sans quoi le rapport $f : \varphi$ serait constant. Mais chacun de ces coefficients est lui-même linéaire et homogène en $l(v)$ et $\lambda(v)$; il doit donc, pour que le rapport $f : \lambda$ ne se réduise pas à une constante, être identiquement nul. En d'autres termes, on doit supposer nuls les quatre déterminants en lesquels se décompose le précédent. Si l'on n'écrit, pour abrégér, qu'une ligne de chacun d'eux, on aura les quatre équations

$$(13) \quad \begin{cases} \| 1 & a_i & b_i \| = 0, & \| 1 & a_i & \beta_i \| = 0, \\ \| 1 & \alpha_i & \beta_i \| = 0, & \| 1 & \alpha_i & b_i \| = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Il est aisé de voir qu'on satisfait de la manière la plus générale possible aux équations (13) en prenant

$$(13)' \quad \begin{cases} a_i = a + a' k_i, & b_i = b + b' k_i & (i = 1, 2, 3), \\ \alpha_i = \alpha + \alpha' z_i, & \beta_i = \beta + \beta' z_i & (i = 1, 2, 3), \end{cases}$$

toutes les lettres nouvelles désignant des constantes arbitraires. Si l'on substitue ces expressions des douze paramètres $a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i$ dans les équations (14), on trouve

$$(14)' \quad \begin{cases} a' \beta' + 1 - k_i - z_i = 0, \\ \alpha' b' + 1 - z_i - k_i = 0, \end{cases}$$

Si le déterminant qui figure dans ces deux équations n'est pas nul, on devra supposer soit $a' = 0$ et $\alpha' = 0$, ce qui entraînerait l'identité des trois fonctions $U_i : U'_i$, soit $\alpha' = 0$ et $\beta' = 0$. Dans

ce dernier cas, les relations (13)' donnent

$$\begin{aligned} a_i &= a + a' k_i, & b_i &= b_i + b' k_i, \\ z_i &= z, & \beta_i &= \beta; \end{aligned}$$

les formules (7) et (8) deviennent

$$\begin{aligned} \frac{U_i}{U'_i} &= (a + a' k_i) f(u) + z \varphi(u), \\ \frac{V_i}{V'_i} &= (b + b' k_i) l(v) + \beta \lambda(v). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{dU_i}{U_i} &= \frac{du}{af(u) + z\varphi(u) + k_i a' f(u)}, \\ \frac{dV_i}{V_i} &= \frac{dv}{bl(v) + \beta\lambda(v) + k_i b' \lambda(v)}. \end{aligned}$$

Comme on a nécessairement ici $a' b' \neq 0$, on pourra écrire

$$\begin{aligned} \frac{dU_i}{U_i} &= \frac{1}{\frac{af(u) + z\varphi(u)}{a' f(u)} + k_i} \frac{du}{a' f(u)}, \\ \frac{dV_i}{V_i} &= \frac{1}{\frac{bl(v) + \beta\lambda(v)}{b' \lambda(v)} + k_i} \frac{dv}{b' \lambda(v)}. \end{aligned}$$

Il suffira, dès lors, de prendre comme nouvelles variables

$$u' = \frac{af(u) + z\varphi(u)}{a' f(u)}, \quad v' = \frac{bl(v) + \beta\lambda(v)}{b' \lambda(v)},$$

pour trouver

$$\frac{dU_i}{U_i} = \frac{F(u') du'}{u' + k_i}, \quad \frac{dV_i}{V_i} = \frac{G(v') dv'}{v' + k_i},$$

et, finalement, en supprimant les accents,

$$(15) \quad \log x = \int \frac{F(u) du}{u + k_1} + \int \frac{G(v) dv}{v + k_1},$$

ainsi que deux formules analogues avec k_2 et k_3 pour $\log y$ et $\log z$.

Égalons maintenant à zéro le déterminant (14)'. Toutes les

solutions de l'équation ainsi obtenue

$$\|1 - k_i - z_i\| = 0$$

sont représentées par les formules

$$\bullet \quad k_i = m + nr_i, \quad z_i = \mu + \nu r_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

d'où l'on déduit, en vertu des relations (13)',

$$\begin{aligned} a_i &= a + ma' + na' r_i, & b_i &= b + mb' + nb' r_i, \\ x_i &= x + \mu x' + \nu x' r_i, & y_i &= y + \mu y' + \nu y' r_i. \end{aligned}$$

Par suite les expressions (7) et (8) deviennent

$$\begin{aligned} \frac{U_i}{U_i'} &= (a + ma') f(u) + (x + \mu x') \varphi(u) + r_i [na' f(u) + \nu x' \varphi(u)], \\ \frac{V_i}{V_i'} &= (b + mb') l(v) + (y + \mu y') \lambda(v) + r_i [nb' l(v) + \nu y' \lambda(v)]. \end{aligned}$$

En répétant le raisonnement qui vient d'être fait, on arrivera exactement aux mêmes conclusions que dans l'hypothèse précédente. En résumé, dans le troisième cas, on n'obtient pas d'autres surfaces que celles qui sont représentées par les formules

$$(16) \quad \begin{cases} \log x = \int \frac{U du}{u+a} + \int \frac{V dv}{v+a}, \\ \log y = \int \frac{U du}{u+b} + \int \frac{V dv}{v+b}, \\ \log z = \int \frac{U du}{u+c} + \int \frac{V dv}{v+c}, \end{cases}$$

où U et V sont deux fonctions arbitraires, l'une de u , l'autre de v , a, b, c trois constantes quelconques.

M. Sophus Lie, qui a le premier considéré ces surfaces, a indiqué (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXIV, p. 335) qu'on peut déterminer leurs lignes asymptotiques. Pour le vérifier, il suffit de calculer, au moyen des formules (16), les fonctions D et D'' . On trouve ainsi

$$D = \frac{U(U-1)}{(u-a)(u+b)(u+c)}, \quad D'' = \frac{V(V-1)}{(v+a)(v+b)(v+c)},$$

le facteur commun φ représentant l'expression

$$\frac{xyzV(u-v)^2 \Sigma ab(a-b)}{(u+a)(u+b)(u+c)(v+a)(v+b)(v+c)}.$$

On voit que l'équation (12) des asymptotiques est de la forme

$$F(u) du^2 - \Phi(v) dv^2 = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

7. *Remarque.* — Il peut être avantageux, dans certains cas, de faire disparaître le signe d'intégration à la fois des trois fonctions

$$\int \frac{F(u) du}{u+a}, \quad \int \frac{F(u) du}{u+b}, \quad \int \frac{F(u) du}{u+c}.$$

Il suffit à cet effet de poser

$$F(u) = (u+a)(u+b)(u+c) \varphi'''(u)$$

et d'intégrer par parties; on trouve ainsi

$$\int \frac{F(u) du}{u+a} = (u+b)(u+c) \varphi''(u) - (2u+b+c) \varphi'(u) + 2\varphi(u),$$

la fonction $\varphi(u)$ étant laissée arbitraire.

Cette remarque permet d'éliminer les paramètres u et v entre les relations (11) qui définissent les surfaces trouvées au n° 5, et que l'on peut, en remplaçant m_1, m_2, m_3 par a, b, c , écrire de la façon suivante :

$$\log x^{\frac{1}{a}} = \log u + v^2 \varphi'' - 2v \varphi' + 2\varphi + (b+c)(v \varphi'' - 2\varphi') + bc \varphi'',$$

$$\log y^{\frac{1}{b}} = \log u + v^2 \varphi'' - 2v \varphi' + 2\varphi + (c+a)(v \varphi'' - 2\varphi') + ca \varphi'',$$

$$\log z^{\frac{1}{c}} = \log u + v^2 \varphi'' - 2v \varphi' + 2\varphi + (a+b)(v \varphi'' - 2\varphi') + ab \varphi''.$$

Le symbole φ désigne une fonction arbitraire de v , dont les dérivées sont représentées par φ' et φ'' . Des équations ci-dessus, on déduit, par des combinaisons évidentes,

$$\log x^{\frac{b-c}{a}} y^{\frac{c-a}{b}} z^{\frac{a-b}{c}} = \varphi'' \Sigma bc(b-c),$$

$$\log x^{b-c} y^{c-a} z^{a-b} = (v \varphi'' - 2\varphi') \Sigma a(b^2 - c^2),$$

Comme $v z'' - 2 z'$ est une fonction de z'' , nous éliminerons v en écrivant

$$(11)' \quad x^{\frac{b-c}{a}} y^{\frac{c-a}{b}} z^{\frac{a-b}{c}} = \Phi(x^{b-c} y^{c-a} z^{a-b}),$$

le symbole Φ désignant une fonction arbitraire de son argument. Nous avons donc ce théorème : *Les lignes asymptotiques des surfaces que représente l'équation (11)' peuvent être déterminées par deux quadratures, quelles que soient les indéterminées a, b, c , et la fonction arbitraire Φ .*

II.

8. Les surfaces (1) que nous avons obtenues tout d'abord (n° 2) sont des transformées homographiques de celles que représente l'équation

$$(17) \quad f_1(L, M) = f_2(N, P),$$

où L, M, N, P sont quatre fonctions linéaires de x, y, z ; f_1, f_2 des fonctions homogènes et du même degré de leurs arguments respectifs. M. Jamet (*loc. cit.*) a fait connaître une propriété caractéristique des surfaces (17) : *Tous les plans tangents menés aux divers points d'une section faite par un plan contenant la droite $N = 0, P = 0$, coupent en un même point la droite $L = 0, M = 0$.*

Pour les transformées homographiques que nous avons considérées et qu'on peut représenter par l'équation

$$(17)' \quad z = \frac{f(x)}{g\left(\frac{y}{z}\right)},$$

cette propriété s'énonce ainsi : *Les plans tangents menés aux divers points d'une section faite par un plan contenant l'arc des x enveloppent un cylindre dont les génératrices sont parallèles au plan des y, z .*

Il n'est pas sans intérêt de rechercher toutes les surfaces qui possèdent la propriété réciproque : *Les courbes de contact des*

cylindres circonscrits parallèlement à un plan fixe sont des courbes planes dont les plans passent par une droite fixe.

9. A cet effet, déterminons d'abord *toutes les surfaces telles que les courbes de contact des cylindres circonscrits parallèlement au plan des yz soient des courbes planes.*

Toute surface, pouvant être considérée comme l'enveloppe des cylindres qui lui sont circonscrits parallèlement au plan des yz , peut être représentée par l'équation

$$(18) \quad z + ay = f(x, a)$$

qui est celle d'un pareil cylindre et par l'équation dérivée

$$(19) \quad y = f'_a(x, a).$$

Les courbes de contact des cylindres sont les courbes $a = \text{const.}$ Écrivons que leur torsion est nulle. Il faut et il suffit pour cela qu'on ait, pour toute valeur de a ,

$$\begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix} = 0,$$

les dérivées étant prises par rapport à x . Cette équation se réduit à

$$y'' z''' - z'' y''' = 0$$

et montre que le rapport $z'' : y''$ est une fonction de a . Nous poserons

$$z''_{x^2} = \left[\frac{\Lambda(a)}{\Lambda'(a)} - a \right] y''_{x^2}.$$

Mais, comme les équations de la surface donnent

$$y''_{x^2} = f''_{ax^2}, \quad z''_{x^2} = f''_{x^2} - a f'''_{ax^2},$$

il vient

$$f''_{x^2} = \frac{\Lambda}{\Lambda'} f'''_{ax^2},$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial a} \log f''_{x^2} = \frac{\Lambda'}{\Lambda}.$$

On déduit de là d'abord

$$f''_{x^2} = \Lambda \Lambda',$$

X désignant une fonction arbitraire de x ; puis

$$f = AX + A_1x + A_2,$$

les lettres A , A_1 , A_2 désignant trois fonctions arbitraires de a . Les solutions qu'on obtiendrait en supposant nulle soit la dérivée z'' , soit la dérivée y'' , rentrent dans celle-là. Ainsi, *les surfaces cherchées sont les enveloppes des cylindres* ⁽¹⁾

$$(20) \quad z + ay = AX + A_1x + A_2.$$

Effectivement, on obtient les caractéristiques de ces cylindres en adjoignant à cette équation l'équation dérivée

$$(21) \quad y = A'X + A'_1x + A'_2,$$

et il est visible que ces courbes sont situées dans le plan variable

$$(22) \quad A'z + (A'a - A)y + (AA'_1 - A'A_1)x + AA'_2 - A'A_2 = 0.$$

Nous allons maintenant exprimer que ce plan passe par une droite fixe. Il y a deux cas à distinguer suivant que la dérivée A' est nulle ou différente de zéro.

10. *Premier cas.* — Soit $A' = 0$; par suite, $A = \text{const.} = m$. Le plan de la courbe de contact du cylindre circonscrit a pour équation

$$(21)' \quad y = A'_1x + A_2;$$

il ne peut contenir d'autre droite fixe, située à distance finie, qu'une parallèle à l'axe des z . Cette droite étant prise pour axe des z , on aura $A'_2 = 0$; c'est-à-dire que A_2 est une constante. En la négligeant, ce qui est permis, on obtient les surfaces enveloppes des cylindres

$$(23) \quad z + ay = f(x, a) = mX + A_1x,$$

pour lesquels X et A_1 sont deux fonctions arbitraires.

(1) Si l'on suppose A , proportionnel à A' , on obtient une classe remarquable de surfaces, dont chacune admet une série de déformations dépendant d'un paramètre arbitraire, et dans lesquelles le réseau des courbes $x = \text{const.}$, $a = \text{const.}$, reste conjugué. Voir le travail de M. Goursat, *Sur un problème relatif à la déformation des surfaces* (*American Journal of Mathematics*, t. XIV).

Si le plan de la courbe de contact contient une droite fixe rejetée à l'infini, il est nécessairement parallèle au plan $y = 0$. Alors $A'_1 = 0$; soit $A_1 = \text{const.} = n$; les cylindres cherchés ont pour équation

$$(24) \quad z + ay = f(x, a) = mX + nx + A_2.$$

II. *Second cas.* — Soit $A' \neq 0$. Si la droite fixe est rejetée à l'infini, les plans des courbes de contact sont parallèles à un plan fixe, qu'on peut prendre pour plan des xy . Alors on a

$$A'a - A = 0, \quad A'A_1 - AA'_1 = 0,$$

ce qui donne, avec deux constantes arbitraires m et n ,

$$A = ma, \quad A_1 = mna.$$

On arrive ainsi aux cylindres

$$(25) \quad z + ay = f(x, a) = ma(X + n) + A_2.$$

Si la droite fixe, située à distance finie, n'est parallèle aux génératrices d'aucun des cylindres circonscrits, on peut la prendre pour axe des x ; d'où les deux relations

$$AA'_1 - A'A_1 = 0, \quad AA'_2 - A'A_2 = 0,$$

qui expriment que les fonctions A_1 et A_2 ne diffèrent de A que par des facteurs constants. Dès lors, la fonction $f(x, a)$ se réduit au produit de A par une fonction de x . Or, si l'on a

$$(26) \quad z + ay = A f(x),$$

il en résulte

$$(27) \quad y = A' f(x),$$

d'où par division

$$\frac{z}{y} + a = \frac{A}{A'}.$$

Ainsi, a est une fonction du rapport $z : y$. Il en est de même de

A' et l'équation (27) prend la forme

$$(27)' \quad y = \frac{f(x)}{\psi\left(\frac{z}{y}\right)},$$

strictement équivalente à celle des surfaces (17)'.

Supposons enfin que la droite fixe, située à distance finie, soit parallèle aux génératrices de l'un des cylindres circonscrits; nous la prendrons pour axe des y . Écrivons que le plan variable (22) contient cet axe. Nous aurons

$$A'a - A = 0, \quad A\Lambda'_2 - A'\Lambda_2 = 0,$$

d'où par intégration

$$A = ma, \quad \Lambda_2 = mna,$$

m et n étant deux constantes. Donc, les surfaces correspondantes sont les enveloppes des cylindres

$$(28) \quad z + ay = f(x, a) = maX + \Lambda_1 x,$$

car on peut supprimer la constante n qui s'ajouterait à la fonction arbitraire X .

12. Si l'on rapproche les cinq résultats que nous venons d'obtenir, on arrive à la conclusion suivante :

Les surfaces que leurs cylindres circonscrits parallèlement à un plan fixe touchent suivant des courbes planes dont les plans passent par une droite fixe sont les enveloppes des cylindres ayant pour équation

$$(18) \quad z + ay = f(x, a),$$

où la fonction f admet l'une des deux formes suivantes :

$$(29) \quad \begin{cases} f(x, a) = \Lambda(a)X(x), \\ f(x, a) = (ma + n)X(x) + (px + q)\Lambda(a), \end{cases}$$

les deux fonctions Λ , X étant arbitraires ainsi que les quatre constantes m , n , p , q .

Nous allons voir que les lignes asymptotiques de chacune de ces surfaces sont déterminées par deux quadratures.

En effet, les courbes $x = \text{const.}$, $a = \text{const.}$ formant un réseau conjugué, l'équation différentielle des asymptotiques est

$$D \, dx^2 + D'' \, da^2 = 0.$$

Un calcul facile montre que, pour les surfaces enveloppes des cylindres

$$z + ay = f(x, a),$$

cette équation se réduit à

$$f''_{xx} \, dx^2 - f''_{aa} \, da^2 = 0,$$

et il est visible que, quand la fonction f admet l'une ou l'autre des formes (29), cette équation rentre dans le type

$$F(x) \, dx^2 - \Phi(a) \, da^2 = 0,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

13. Voici, pour terminer, une propriété *caractéristique* des surfaces (17), étroitement liée à celle qu'a démontrée M. Jamet et que nous avons rappelée au n° 8. Je dis que *ces surfaces présentent un réseau conjugué formé de deux familles de courbes planes, dont les plans passent par deux droites fixes.*

Soient en effet (D_1) et (D_2) les deux droites $L = M = 0$ et $N = P = 0$. Menons un plan par (D_1) et un plan par (D_2) . Ces plans déterminent dans la surface des sections (C_1) et (C_2) . Considérons les plans tangents menés à la surface le long de (C_2) : ils enveloppent, d'après la proposition de M. Jamet, un cône dont le sommet est en un certain point S_1 de la droite (D_1) . En un point M commun à (C_1) et à (C_2) , la tangente à (C_2) , courbe de contact du cône (S_1) , a pour conjuguée la génératrice MS_1 de ce cône, qui est tangente à la courbe (C_1) . Ainsi les sections telles que (C_1) et les sections telles que (C_2) forment un réseau conjugué.

Pour établir que cette propriété caractérise les surfaces considérées, on peut montrer qu'elle entraîne la proposition de M. Jamet. A cet effet, supposons qu'il existe un réseau conjugué formé de deux familles de courbes planes dont les plans passent, pour les courbes d'une famille, par une droite (D_1) , pour celles

de l'autre famille, par une droite (D_2) . Considérons une section plane (C_1) dont le plan passe par (D_1) . Soit M un point de (C_1) . Celle des courbes conjuguées de l'autre famille qui passe par M est, d'après un théorème de M. Kœnigs, la courbe de contact du cône circonscrit qui a pour sommet le point S_1 , où la tangente en M à la section (C_1) rencontre la droite (D_1) . Mais, par hypothèse, cette courbe (C_2) est plane et son plan passe par (D_2) . Donc les plans tangents menés le long de la section plane (C_2) , dont le plan contient (D_2) , vont tous passer au point S_1 de la droite (D_1) : c'est la proposition de M. Jamet.

On peut aussi établir cette réciproque par un calcul direct. Prenons pour plan des xy un plan parallèle aux deux droites fixes, également distant de chacune d'elles; pour axe des z , une droite qui les rencontre. Deux plans, passant respectivement par ces deux droites, seront représentés par les équations

$$(30) \quad x = u(z + c), \quad y = v(z - c),$$

où c est une constante. Pour qu'un point de la droite ainsi définie engendre une surface dont les sections planes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ forment un réseau conjugué, il faut et il suffit que z soit une fonction de u et v , telle que le déterminant D' soit identiquement nul. On a ainsi l'équation

$$\begin{vmatrix} u z''_{uv} + z'_v & u z'_u + z + c & u z'_v \\ v z''_{uv} + z'_u & v z'_u & v z'_v + z - c \\ z''_{uv} & z'_u & z'_v \end{vmatrix} = 0,$$

qui se réduit à

$$(z^2 - c^2) z''_{uv} - 2 z z'_u z'_v = 0,$$

ce qui n'est autre chose que le développement de la condition

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{z - c}{z + c} = 0.$$

En conséquence, l'intégrale générale est

$$(31) \quad \frac{z - c}{z + c} = \frac{f(u)}{\varphi(v)},$$

avec deux fonctions arbitraires. Mais si l'on tient compte des équations

tions (30), cette relation prend la forme

$$(z - c)\varphi\left(\frac{y}{z - c}\right) = (z + c)f\left(\frac{x}{z + c}\right),$$

qui rentre visiblement dans le type (17). La propriété est donc caractéristique de cette classe de surfaces.

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DE LA FONCTION DE GREEN;

par M. ZAREMBA.

1. La lecture du beau Mémoire de M. Picard (*Journal de Liouville*, t. VI, 4^e série) fait immédiatement naître l'idée qu'un grand nombre de résultats, établis par l'éminent géomètre pour les équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes, doivent pouvoir s'étendre au cas de plusieurs variables indépendantes. On reconnaît immédiatement que la chose se ramène à la démonstration d'une propriété de la fonction de Green, facile à établir dans le plan par la représentation conforme, mais beaucoup moins immédiate dans les autres cas. C'est cette propriété qui fera l'objet du présent travail. Nous nous bornerons à trois variables indépendantes, ce qui est le cas le plus intéressant, mais on verra que la méthode suivie pourrait s'appliquer au cas général.

2. Voici l'énoncé de la propriété dont il vient d'être question.

Soit $G(x, y, z; x', y', z')$ la fonction de Green relative à un domaine D limité par une surface convexe S admettant en chacun de ses points des rayons de courbure déterminés. Désignons par d la plus grande distance de deux points pris sur la surface S et par a la limite inférieure des rayons de courbure de la surface S en un point variable. Je dis que l'intégrale

$$(1) \quad I = \int \int \int \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| dx' dy' dz',$$

étendue à tout le domaine D, est inférieure à un nombre N jouissant des propriétés suivantes :

a. Le nombre N dépend *uniquement* de la surface S.

b. Le nombre N tend vers zéro lorsque la surface S varie de façon que d tende vers zéro, le rapport $\frac{d}{a}$ ne dépassant jamais un nombre fixe M .

En posant

$$\rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

on peut écrire

$$(2) \quad G(x, y, z; x', y', z') = \frac{1}{\rho} - v(x, y, z; x', y', z'),$$

le second terme du second membre étant une fonction qui admet des dérivées finies et continues dans tout le domaine D et sur la frontière S de ce domaine.

La fonction G étant positive à l'intérieur de la surface S , la fonction u , définie sur cette surface par l'équation

$$4\pi u = \frac{d}{dn} \frac{1}{\rho} - \frac{dv}{dn},$$

où chaque terme du second membre représente suivant l'usage une dérivée prise suivant la normale intérieure élevée en un point P de la surface, ne deviendra négative pour aucune position du point P .

D'ailleurs, en appelant $d\omega$ l'élément de la surface S à l'intérieur duquel se trouve le point P et en désignant par r la distance du point P au point défini par les coordonnées x, y, z , on vérifie tout de suite que la fonction

$$(3) \quad w(x, y, z) = \int \frac{u d\omega}{r},$$

où l'intégration doit être étendue à toute la surface S , coïncide, à l'intérieur de cette surface, avec la fonction v et, à l'extérieur, avec la fonction $\frac{1}{\rho}$.

3. Proposons-nous de former une fonction qui, à l'intérieur de la surface S , ne soit jamais inférieure à la fonction f définie par l'équation

$$(4) \quad f = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2.$$

Désignons, à cet effet, par A le point (supposé intérieur à la surface S) dont les coordonnées sont x, y et z et soit A_0 un point de la surface S (qui, en général, sera unique) dont la distance au point A ne soit supérieure à celle d'aucun autre point de la surface.

Considérons, en outre, le point A_1 symétrique du point A par rapport au point A_0 , et posons

$$r = \overline{AP}, \quad r_1 = \overline{A_1P}, \quad b = \overline{AA_0};$$

soit enfin R une longueur égale à la plus grande des longueurs a et b . On aura

$$(5) \quad b \leq R,$$

et en même temps

$$(6) \quad \frac{r_1}{r} \leq \frac{2R + b}{2R - b},$$

quelle que soit la position du point P sur la surface S.

4. Regardons la droite indéfinie AA_1 comme un axe ξ dirigé du point A vers le point A_1 et rapportons cet axe au point A. Cela posé, cherchons une limite supérieure de la valeur absolue de la dérivée

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = \int_S \frac{u \cos(AP, \xi) d\omega}{r^2},$$

et, dans ce but, comparons-la avec

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{\xi=2b} = \int_S \frac{u \cos(A_1P, \xi) d\omega}{r_1^2}.$$

La surface S étant convexe, on aura

$$\begin{aligned} \cos(A_1P, \xi) &< 0, \\ |\cos(AP, \xi)| &< |\cos(A_1P, \xi)|. \end{aligned}$$

Il vient d'ailleurs, à raison des inégalités (5) et (6),

$$\frac{1}{r} < \frac{3}{r_1}.$$

Par conséquent, en se rappelant que u n'est jamais négatif, on

trouve

$$\left| \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \right| < 9 \left| \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{\xi=2b} \right|.$$

Soit A' le point dont les coordonnées sont x', y' et z' . On aura, à cause des propriétés de w à l'extérieur de la surface S ,

$$\left| \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{\xi=2b} \right| \leq \frac{1}{A'A_1^2},$$

et comme on a, par suite de la convexité de la surface S ,

$$\overline{A'A} < \overline{A'A_1},$$

il viendra

$$(7) \quad \left| \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \right| < \frac{9}{A'A^2}.$$

5. Menons par le point A un axe quelconque τ_i perpendiculaire à l'axe AA_1 , rapportons cet axe au point A et cherchons une limite supérieure de la valeur absolue de la dérivée

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \tau_i} \right)_{\tau_i=0} = \int_S \frac{u \cos(\angle P, \tau_i) d\omega}{r^2}.$$

Menons pour cela par le point A_1 un axe τ_{i1} de même sens que l'axe τ_i , rapportons cet axe au point A_1 et envisageons la dérivée

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \tau_{i1}} \right)_{\tau_{i1}=0} = \int_S \frac{u \cos(\angle P, \tau_{i1}) d\omega}{r_1^2}.$$

En posant

$$\lambda = r \cos(\angle P, \tau_i) = r_1 \cos(\angle P, \tau_{i1}),$$

on aura

$$(8) \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \tau_i} \right)_{\tau_i=0} - \left(\frac{\partial w}{\partial \tau_{i1}} \right)_{\tau_{i1}=0} = \int_S \lambda u \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) d\omega.$$

En tenant compte de l'identité

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3} = \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{rr_1} + \frac{1}{r_1^2} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right),$$

et en observant que

$$r \leq r_1,$$

on trouve

$$(9) \quad \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3} \leq \frac{3}{r^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Or, les inégalités (5) et (6) nous donnent

$$\frac{r_1 - r}{r} \leq \frac{2b}{R},$$

et comme

$$b \leq r_1,$$

il vient

$$(10) \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} < \frac{2}{R}.$$

Par conséquent, en tenant compte des inégalités (9) et (10) et en remarquant que

$$|\lambda| < r,$$

on déduit de la relation (8)

$$\left| \left(\frac{\partial w}{\partial r_i} \right)_{r_i=0} - \left(\frac{\partial w}{\partial r_{i1}} \right)_{r_{i1}=0} \right| < \frac{6}{R} \int \frac{u \, d\omega}{r},$$

ou bien, eu égard à la définition de w ,

$$(11) \quad \left| \left(\frac{\partial w}{\partial r_i} \right)_{r_i=0} \right| < \left| \left(\frac{\partial w}{\partial r_{i1}} \right)_{r_{i1}=0} \right| + \frac{6w}{R}.$$

La lettre A' désignant toujours le point (x', y', z') , on aura

$$\left| \left(\frac{\partial w}{\partial r_{i1}} \right)_{r_{i1}=0} \right| \leq \frac{1}{A'A_1^2},$$

et, par conséquent, *a fortiori*,

$$(12) \quad \left| \left(\frac{\partial w}{\partial r_{i1}} \right)_{r_{i1}=0} \right| < \frac{1}{A'A^2}.$$

Le point A étant intérieur à la surface S

$$w < \frac{1}{A'A},$$

on aura donc à plus forte raison, en se rappelant que d désigne la plus grande distance de deux points variables sur la surface S ,

$$(13) \quad w < \frac{d}{A'A^2}.$$

On peut donc conclure des inégalités (11), (12) et (13)

$$\left| \left(\frac{\partial w}{\partial r_1} \right)_{r_1=0} \right| < \left(1 + \frac{6d}{R} \right) \frac{1}{\Lambda' \Lambda^2};$$

d'où, puisque α désigne une limite inférieure de la longueur R ,

$$(14) \quad \left| \left(\frac{\partial w}{\partial r_1} \right)_{r_1=0} \right| < \left(1 + \frac{6d}{\alpha} \right) \frac{1}{\Lambda' \Lambda^2}.$$

6. On déduit immédiatement des inégalités (7) et (14)

$$f = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 < \left[81 + 2 \left(1 + \frac{6d}{\alpha} \right)^2 \right] \frac{1}{\Lambda' \Lambda^2},$$

ou bien

$$f < \frac{Q^2}{\rho^2},$$

en posant

$$Q^2 = 81 + 2 \left(1 + \frac{6d}{\alpha} \right)^2, \quad \overline{\Lambda' \Lambda} = \rho.$$

7. Il vient, en rapprochant cette inégalité de l'équation (2),

$$\left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| < \frac{1+Q}{\rho^2}.$$

Par conséquent, l'intégrale I , définie par l'équation (1), satisfait à l'inégalité

$$J < (1+Q) \iiint \frac{dx' dy' dz'}{\rho^2},$$

où l'intégration est étendue à une sphère de centre A et de rayon d . Il en résulte

$$J < 4\pi(1+Q)d,$$

inégalité qui démontre notre théorème.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 3 FÉVRIER 1896.

PRÉSIDENTE DE M. KOENIGS.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société :

MM. Petrovitch et de Séguier, présentés par MM. Picard et Goursat; M. Dennerly, présenté par MM. Vaschy et Duporeq; MM. Grévy et Bourlet, présentés par MM. Goursat et Kœnigs; MM. Cosserat et Henry Bourget, présentés par MM. Darboux et Kœnigs; M. Leau, présenté par MM. Kœnigs et Raffy; M. Le Vasseur, présenté par MM. Picard et Kœnigs; M. Charve, présenté par MM. Appell et Tannery; MM. Leroux et Lebel, présentés par MM. Appell et Kœnigs; M. Tissot, présenté par MM. Guyou et Kœnigs; M. Albert Gauthier-Villars, présenté par MM. Fouret et Carvallo; MM. Cels et Dumas, présentés par MM. Goursat et Raffy.

Communications :

M. d'Ocagne : *Abaque général des marées.*

M. Painlevé : *Propriété générale de l'équation différentielle du premier ordre.*

M. Dennerly : *Intersection d'une droite avec une quadrique définie par neuf points.*

M. PAINLEVÉ communique une démonstration de M. Bendixon *Sur l'existence de l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles linéaire.*

SÉANCE DU 19 FÉVRIER 1896.

PRÉSIDENTE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. Carvallo : *Sur l'impossibilité de satisfaire par des points réels aux conditions de la configuration formée par les neuf points d'inflexion d'une cubique plane.*

M. VICAIRE expose les résultats auxquels il est arrivé dans deux Mémoires intitulés, l'un *Sur la réalité de l'espace et le mouvement absolu*, l'autre *Sur la nature et sur les principes de la Mécanique rationnelle*.

SÉANCE DU 4 MARS 1896.

PRÉSIDENTE DE M. KOENIGS.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. W. de Tannenberg, présenté par MM. Darboux et Kœnigs; M. Alfred Tresca, présenté par MM. Tresca et Carvallo; M. Duport, présenté par MM. Appell et Painlevé; M. Cartan, présenté par MM. Picard et Kœnigs; M. Griess, présenté par MM. Appell et Kœnigs; M. Piéron, présenté par MM. Darboux et Tannery; M. Torrès, présenté par MM. Poincaré et d'Ocagne; M. Quiquet, présenté par MM. Fouret et Raffy.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur une machine à résoudre les équations*, inventée par M. Torrès.

M. MICHEL adresse la Note suivante :

Courbe d'ombre sur une surface particulière du quatrième ordre.

Considérons une surface S , un point O de la surface et la normale ON en ce point. Si l'on imagine toutes les sections planes de la surface, qui passent en O , et si l'on prend en ce point les centres de courbure de ces sections, le lieu des points ainsi obtenus est une surface Σ du quatrième ordre.

Cette surface Σ peut être engendrée par un cercle passant en O , ayant son centre sur ON , dont le plan tourne autour de cette droite et dont le diamètre d varie suivant la relation d'Euler :

$$\frac{1}{d} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2},$$

R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux de la surface S au point O , et φ l'angle du plan du cercle considéré avec l'un des

plans principaux de courbure (voir *Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, Congrès de 1893).

J'ai démontré géométriquement (*loc. cit.*) que si l'on prend le point O pour pôle de transformation, la surface inverse de Σ est un conoïde de Plücker, propriété qui constitue une extension à l'espace de celle qui a été signalée par M. Laisant l'année dernière dans le *Bulletin*, relativement à la transformation inverse du cercle de courbure en un point d'une courbe plane, par rapport à ce point.

La présente Note a pour but de faire seulement quelques remarques au sujet de la détermination de la ligne d'ombre de la surface Σ éclairée par un point lumineux de la droite ON.

Soit A le point lumineux; tout plan passant par ON coupe la surface Σ suivant un cercle, et l'on obtient deux points de la ligne d'ombre en menant dans ce plan à ce cercle les deux tangentes issues du point A.

Si l'on amène, par rotation autour de ON, tous ces plans en coïncidence avec l'un des plans de courbure principaux de la surface S, les sections, déterminées dans Σ par chacun d'eux, se rabattrent sur ce plan suivant des cercles passant en O et dont les centres sont sur ON.

Le lieu des points de contact des tangentes issues de A à cette série de cercles est une strophoïde droite dont le point double est en O et le sommet en A.

On voit, par conséquent, que *la courbe d'ombre est l'intersection de la surface Σ et d'une surface de révolution engendrée par une strophoïde tournant autour de ON.*

Il est à remarquer que la strophoïde, et par suite la surface de révolution qu'elle engendre, ne dépendent que de la distance OA; cette surface est donc la même, quelle que soit la surface S et par suite la surface Σ . On en conclut que :

Le lieu des courbes d'ombre déterminées sur toutes les surfaces Σ passant en O et ayant ON pour droite double, par un point A lumineux de cette droite, est une surface de révolution autour de ON, dont la méridienne est une strophoïde droite.

Je me propose d'étudier prochainement la courbe d'ombre dans

le cas le plus général; je tenais à faire d'abord ces quelques remarques sur un cas particulier.

SÉANCE DU 18 MARS 1896.

PRÉSIDENCE DE M. KOENIGS.

Communications :

M. Touche : *Calcul de la résistance des fluides à un disque mince.*

M. Fleury : *Sur un développement en série.*

M. Carvalho : *Sur le planimètre de Petersen.*

M. GOURSAT adresse un Mémoire *Sur les lignes asymptotiques.*

M. PETROVITCH adresse des *Remarques algébriques sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre.*

M. CARTAN adresse un Mémoire intitulé : *Le principe de dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace réglé.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UN PROBLÈME DE DÉFORMATION;

Par M. PAUL ADAM.

M. Goursat a posé et résolu ⁽¹⁾ le problème suivant :

Trouver la surface la plus générale (S) susceptible de se déformer de façon qu'une série de sections planes dont les plans sont parallèles se change en une série de sections planes dont les plans soient parallèles.

Il a obtenu, pour les équations de cette surface,

$$(1) \quad \begin{cases} y = f(x) \theta_1(a) + \tau_1(a), \\ z = f(x) \theta_2(a) + \tau_2(a); \end{cases}$$

(1) *American Journal of Mathematics*, Vol. XIV.

f est une fonction arbitraire et, des quatre fonctions $\theta, \theta_1, \gamma, \gamma_1$, deux seulement sont arbitraires (elles sont liées par deux relations).

Il a donné un mode de génération élégant de cette surface.

Il a montré enfin que les surfaces (S') applicables sur la surface (S) de manière à satisfaire à l'énoncé du problème ont comme équations

$$(2) \quad \begin{cases} X = \int \sqrt{1 + n f'^2(x)} dx, \\ Y = f(x) \theta_1(a) + H_1(a), \\ Z = f(x) \theta(a) + H(a); \end{cases}$$

n est une constante arbitraire et les quatre fonctions θ, θ_1, H, H_1 , se calculent au moyen des quatre fonctions $\theta, \theta_1, \gamma, \gamma_1$.

Sur les surfaces (S) et (S'), les courbes (x) sont les courbes correspondantes situées dans des plans parallèles.

Ainsi que l'a fait remarquer M. Goursat, ces surfaces sont des sortes de moulures dont le profil variable est représenté par les courbes (a), lesquelles sont planes et dans des plans parallèles à l'axe des x .

Il est facile de s'assurer, au moyen du travail de M. Goursat, que le calcul des quatre fonctions θ, θ_1, H, H_1 à l'aide des fonctions $\theta, \theta_1, \gamma, \gamma_1$, n'introduit pas de constantes arbitraires propres à faire varier la forme ou la grandeur des surfaces (S'); ces surfaces dépendent donc au fond du seul paramètre arbitraire n quand (S) est donnée : c'est dire que la surface (S) se transforme en les surfaces (S') par une déformation continue, au moins au point de vue analytique, et parfaitement déterminée. Cette remarque était nécessaire pour donner de la précision à ce qui va suivre.

La déformation subie par la surface (S) pour passer aux surfaces (S') présente un caractère intéressant qu'il est facile de mettre en évidence.

C'est l'objet de cette Note.

Pour simplifier le langage, disons que les surfaces (S') sont *associées* à la surface (S), et appelons *profils* et *directrices* de ces surfaces les courbes (a) et (x).

Étant donnée une surface (S) et ses associées (S'), supposons que l'on conserve les fonctions $\theta, \theta_1, \gamma, \gamma_1$, mais qu'on remplace

la fonction $f(x)$ par une autre $f_1(x)$; à (S) et (S') se substitueront d'autres surfaces (S₁) et (S'₁); les valeurs x et x_1 de l'abscisse x satisfaisant à l'équation

$$f(x) = f_1(x_1)$$

correspondent, sur (S) et (S₁), d'une part, et sur (S') et (S'₁), d'autre part, à deux directrices égales dont *la seconde* (et ce point nous sera utile plus loin) *s'obtient en donnant à la première une certaine translation parallèle à l'axe des x* ; en d'autres termes, les nouvelles surfaces (S₁) et (S'₁) ont des directrices (x) égales respectivement à celles des premières (S) et (S'), mais distribuées suivant une autre loi, c'est-à-dire appuyées sur d'autres profils (α) ⁽¹⁾. Par conséquent :

En passant de la surface (S) à ses associées (S'), les directrices prennent la même succession de formes quand on change les profils de la surface (S).

Supposons au contraire que, la fonction $f(x)$ étant conservée, ce soient les fonctions θ , θ_1 , τ , τ_1 qui soient remplacées par d'autres; on aura encore de nouvelles surfaces (S₁) et (S'₁).

Un profil quelconque (α) de la surface (S) a comme équations, en le transportant parallèlement au plan des yz ,

$$y = f(x) \theta_1(\alpha),$$

$$z = f(x) \theta(\alpha),$$

et, si r_1 est l'ordonnée de ce profil dans son plan, on a

$$\frac{y}{\theta_1} = \frac{z}{\theta} = f(x) = \frac{r}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta^2}},$$

de sorte que le profil considéré a pour équation dans son plan

$$r = f(x) \sqrt{\theta_1^2 + \theta^2}.$$

La forme de cette équation montre, en raisonnant comme nous l'avons fait pour les directrices, que les profils des surfaces (S) et de même ceux des surfaces (S') sont respectivement égaux aux profils des surfaces (S₁) et (S'₁), mais qu'ils sont distribués sui-

(1) Ce fait résulte aussi du mode de génération indiqué par M. Goursat pour la surface (S).

vant une autre loi, c'est-à-dire appuyés sur d'autres directrices. Donc :

En passant de la surface (S) à ses associées (S'), les profils prennent la même succession de formes quand on change les directrices de la surface (S).

La surface (S) peut être une surface moulure de Monge ou une surface de translation à génératrices planes.

Dans le cas où (S) est une surface moulure de Monge, les surfaces (S') sont aussi des surfaces moulures de Monge; on peut, en conservant le profil de (S), prendre des cercles comme directrices de cette surface qui est ainsi remplacée par une surface de révolution; les surfaces (S') deviennent aussi des surfaces de révolution, et l'on a les théorèmes ci-après que j'ai énoncés en 1891 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* :

Pour toutes les surfaces moulures de Monge ayant le même profil qui se déforment en restant des moulures de Monge, le profil passe par la même succession de formes que s'il était le méridien d'une surface de révolution d'axe perpendiculaire aux plans des directrices des moulures qui se déformât en restant de révolution.

Plus particulièrement :

Le méridien d'une surface de révolution qui se déforme en restant de révolution passe par la même succession de formes quand on remplace l'axe de la surface par un autre parallèle au premier (et situé bien entendu dans le plan du méridien).

Par exemple, dans ces conditions :

Le méridien d'une sphère passe par la même succession de formes que celui d'un tore.

Dans le cas où (S) est une surface de translation à génératrices planes, les surfaces (S') sont aussi de translation et à génératrices planes⁽¹⁾; les profils et directrices de ces surfaces sont justement

(1) Il est à remarquer que, pour les surfaces de translation (S) et (S') obté-

leurs deux systèmes de génératrices planes et l'on a ce théorème :

Si une surface de translation à génératrices planes se déforme en gardant sa définition, les génératrices de l'un quelconque des deux systèmes passent par la même série de formes quand on change celles de l'autre système.

Il est facile de reconnaître que ce théorème s'applique à une surface de translation quelconque :

Si une surface de translation quelconque se déforme en restant surface de translation avec conservation des paramètres des deux systèmes de courbes génératrices, les génératrices de l'un quelconque de ces deux systèmes passent par la même série de formes quand on change celles de l'autre système.

En effet, les coordonnées de la surface donnée (S) et de la surface déformée (S') doivent être de la forme

$$x = f(u) + \varphi(v), \quad x' = U + V,$$

u et v étant les paramètres des deux systèmes de courbes génératrices.

En égalant les ds^2 de ces deux surfaces, les coefficients des termes en $du dv$ conduisent à l'équation

$$\sum f'(u) \varphi'(v) - \sum U'V' = 0.$$

Or on sait qu'une telle équation ne peut être vérifiée que par des relations linéaires entre les fonctions U' et $f'(u)$, c'est-à-dire U et $f(u)$ d'une part, et entre les fonctions V' et $\varphi'(v)$, c'est-à-dire V et $\varphi(v)$ d'autre part; les fonctions U dépendent donc des fonctions $f(u)$ seules et les fonctions V des fonctions $\varphi(v)$ seules, ce qui était évident *a priori*.

Cela posé, si sur la surface (S) on change les génératrices (u) en conservant les génératrices (v), ce qui revient à remplacer les fonctions $\varphi(v)$ par d'autres, les fonctions V seront modifiées,

unes par M. Goursat, les plans des deux familles de génératrices sont rectangulaires. Ce fait devait nécessairement se produire en vertu d'un théorème que j'ai démontré récemment dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (1895) : *Démonstration d'un théorème sur les surfaces de translation.*

mais non les fonctions U ; par suite les génératrices (v) de la surface (S') resteront bien les mêmes.

On peut remarquer que ce changement des génératrices (u) a pour effet de *donner aux génératrices (v) des translations variables en grandeur et en direction* ; tandis que, pour les surfaces de M. Goursat, le changement des profils (a) *donne aux directrices (x) , ainsi qu'on l'a vu plus haut, des translations variables en grandeur, mais de direction constante (l'axe des x)*.

On peut se proposer de résoudre le problème suivant :

Soit une surface (S) venant coïncider, dans une certaine déformation, avec une série de surfaces (S') ; une famille de courbes au paramètre v étant tracée sur (S) , supposons qu'on change la distribution de ces courbes dans l'espace en conservant leur forme et leur grandeur, et qu'on fasse une opération analogue pour les courbes correspondantes tracées sur (S') ; (S) et (S') se transformeront en (S_1) et (S'_1) :

Déterminer la surface (S) de manière que (S') s'applique encore sur (S'_1) avec correspondance des courbes (v) .

On voit que la surface (S) de M. Goursat et la surface de translation quelconque répondent à cette question de deux manières différentes.

Les équations de ce problème sont faciles à poser. Les surfaces (S) et (S') de coordonnées x, y, z ; x', y', z' étant supposées rapportées aux courbes (v) et à une seconde famille de courbes (u) , les coordonnées x_1, y_1, z_1 ; x'_1, y'_1, z'_1 de (S_1) et (S'_1) devront avoir des formes telles que

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = a + \alpha x + \beta y + \gamma z, & x'_1 = a' + \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \\ y_1 = b + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, & y'_1 = b' + \alpha'_1 x' + \beta'_1 y' + \gamma'_1 z', \\ z_1 = c + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, & z'_1 = c' + \alpha'_2 x' + \beta'_2 y' + \gamma'_2 z', \end{cases}$$

où $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \dots$, qui ont une signification évidente, sont des fonctions de v .

En exprimant que les surfaces (S_1) et (S'_1) s'appliquent l'une sur l'autre, les coefficients de du^2 sont égaux d'eux-mêmes parce que les surfaces (S) et (S') sont applicables l'une sur l'autre ; les coefficients de $du dv$ et de dv^2 fournissent deux équations ;

celles-ci, jointes aux trois équations qui traduisent l'applicabilité de (S) sur (S'), donnent cinq équations entre les six fonctions x, y, z, x', y', z' . Mais, comme la famille de courbes (u) tracée sur (S) reste arbitraire, on peut, sans diminuer la généralité du problème, imposer une condition à cette famille, par exemple d'être orthogonale ou conjuguée à la famille (v); on introduit ainsi une sixième équation entre les six fonctions x, y, z, x', y', z' .

La surface (S) n'est donc pas arbitraire; sa détermination dépend d'ailleurs du nouveau mode de distribution adopté pour les courbes (v) tracées sur (S) et (S'), c'est-à-dire du choix des fonctions $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \dots$.

Imposons-nous, par exemple, la condition que cette distribution se fasse à l'aide de translations parallèles à une même droite que nous pourrions prendre pour axe des x ; nous savons que les surfaces (S) et (S') de M. Goursat répondent à ce cas quant à leurs directrices; il est facile de reconnaître que ce sont les seules; on doit en effet avoir

$$\begin{aligned}x_1 &= a + x, & x'_1 &= a' + x', \\y_1 &= y, & y'_1 &= y', \\z_1 &= z, & z'_1 &= z'.\end{aligned}$$

En égalant les ds^2 de ces deux surfaces, on obtient les deux équations

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{da}{dv} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{da'}{dv} \frac{\partial x'}{\partial u}, \\ \left(\frac{da}{dv} \right)^2 + 2 \frac{da}{dv} \frac{\partial x}{\partial v} &= \left(\frac{da'}{dv} \right)^2 + 2 \frac{da'}{dv} \frac{\partial x'}{\partial v}; \end{aligned} \right.$$

la première, intégrée par rapport à u , donne

$$(5) \quad x \frac{da}{dv} = x' \frac{da'}{dv} + V,$$

V désignant une fonction arbitraire de v .

L'équation (5), dérivée par rapport à v , conduit, en tenant compte de la seconde des équations (4), à

$$(6) \quad 2x \frac{d^2 a}{dv^2} - 2x' \frac{d^2 a'}{dv^2} - \left(\frac{da}{dv} \right)^2 + \left(\frac{da'}{dv} \right)^2 - 2V = 0.$$

Les équations (5) et (6), qui ne contiennent que les deux coor-

données x et x' , montrent que ces deux coordonnées dépendent de la seule variable v ; il en résulte que, dans le cas que nous considérons, les courbes (v) tracées sur (S) et (S') sont dans des plans parallèles aux plans des yz , ou encore que ces surfaces sont justement celles qu'a obtenues M. Goursat.

Dans le cas général, exprimé par les équations (3), la nouvelle distribution des courbes (v) tracées sur (S) et (S') se fait au moyen de translations et de rotations à la fois. Les surfaces de M. Goursat donnent un exemple de ce cas par leurs profils.

Mais il est vraisemblable qu'elles ne sont pas les seules.

SUR LES ÉQUATIONS HOMOGÈNES;

Par M. E. LINDELÖF.

Je considère l'équation linéaire

$$(1) \quad Xf = X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + X_{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} = 0,$$

où $X_1, \dots, X_{n+1}$ sont des fonctions homogènes du même degré m . Cette équation admet $n - 1$ intégrales distinctes qui sont homogènes du degré zéro. En effet, cette condition se traduit par la formule

$$(2) \quad Af = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} = 0.$$

Or on trouve

$$A(Xf) - X(Af) = (m - 1)Xf,$$

relation qui exprime que les équations (1) et (2) forment un système complet. Elles admettent par conséquent $n - 1$ intégrales communes distinctes

$$\zeta_1(x_1, \dots, x_{n+1}), \quad \zeta_2(x_1, \dots, x_{n+1}), \quad \dots, \quad \zeta_{n-1}(x_1, \dots, x_{n+1}),$$

qui sont précisément les intégrales homogènes du degré zéro de l'équation (1).

En écrivant que les équations (1) et (2) sont vérifiées pour $f = \zeta_i$, et en portant dans la première des identités ainsi obtenues

la valeur de $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{n+1}}$ fournie par la seconde, on trouve

$$\left(X_1 - \frac{x_1}{x_{n+1}} X_{n+1} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \dots + \left(X_n - \frac{x_n}{x_{n+1}} X_{n+1} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} = 0$$

($i = 1, 2, \dots, n-1$).

Faisons ici la substitution

$$\frac{x_1}{x_{n+1}} = y_1, \quad \frac{x_2}{x_{n+1}} = y_2, \quad \dots, \quad \frac{x_n}{x_{n+1}} = y_n.$$

En posant

$$X_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}^m Y_i(y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n+1),$$

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_{n+1}) = \psi_k(y_1, \dots, y_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

et supprimant le facteur x_{n+1}^{m-1} , l'identité précédente deviendra

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (Y_1 - y_1 Y_{n+1}) \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1} + \dots + (Y_n - y_n Y_{n+1}) \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n} = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n-1). \end{array} \right.$$

Cela posé, j'établis entre $y_1, \dots, y_n$ les $n-1$ relations suivantes

$$(4) \quad \psi_1 = C_1, \quad \psi_2 = C_2, \quad \dots, \quad \psi_{n-1} = C_{n-1},$$

en désignant par $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ des constantes arbitraires. Il s'ensuit par différentiation

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n} dy_n = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

et en rapprochant ces formules aux formules (3), on en conclut que les variables $y_1, \dots, y_n$, liées par les relations (4), vérifient les équations différentielles

$$\frac{dy_1}{Y_1 - y_1 Y_{n+1}} = \frac{dy_2}{Y_2 - y_2 Y_{n+1}} = \dots = \frac{dy_n}{Y_n - y_n Y_{n+1}},$$

ou bien, en introduisant une variable auxiliaire t ,

$$(5) \quad \frac{dy_i}{dt} = Y_i - y_i Y_{n+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Les relations (4) nous donnent ainsi la solution générale du système (5), et nous pouvons par suite énoncer le théorème suivant :

L'intégration du système (5) revient à la recherche des intégrales homogènes du degré zéro de l'équation (1).

Ce résultat est la généralisation d'un théorème sur les équations différentielles à deux variables, énoncé par M. Darboux (1).

Comme application de ce qui précède, je considère le système des équations différentielles

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = (a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n + a_{i,n+1}) \\ \quad - y_i(a_{n+1,1}y_1 + \dots + a_{n+1,n}y_n + a_{n+1,n+1}) \\ \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

qui est analogue à l'équation de Jacobi. L'équation (1) devient dans ce cas

$$(7) \quad \begin{cases} (a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n+1}x_{n+1}) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots \\ \quad + (a_{n+1,1}x_1 + \dots + a_{n+1,n+1}x_{n+1}) \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} = 0, \end{cases}$$

en sorte qu'on est ramené à l'intégration d'un système linéaire à $n + 1$ variables.

Considérons l'équation en λ

$$(8) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1,n+1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n+1,1} & \alpha_{n+1,2} & \dots & \alpha_{n+1,n+1} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

dont nous désignerons les racines par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$. Dans le cas où ces racines sont distinctes, on pourra déterminer $n + 1$ fonctions linéaires

$$u_i = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{i,n+1}x_{n+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n + 1),$$

telles qu'en les choisissant pour nouvelles variables l'équation (7) prenne la forme

$$\lambda_1 u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \lambda_2 u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \dots + \lambda_{n+1} u_{n+1} \frac{\partial f}{\partial u_{n+1}} = 0,$$

qui s'intègre immédiatement. Pour intégrales homogènes du de-

(1) *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré*, Bulletin des Sciences math. et astr., année 1878, p. 70.

gré zéro, on pourra choisir les suivantes

$$u_1^{\lambda_2-\lambda_3} u_2^{\lambda_3-\lambda_1} u_3^{\lambda_1-\lambda_2}, \quad u_2^{\lambda_3-\lambda_1} u_3^{\lambda_1-\lambda_2} u_1^{\lambda_2-\lambda_3}, \quad \dots \quad u_{n-1}^{\lambda_n-\lambda_{n-1}} u_n^{\lambda_{n+1}-\lambda_{n-1}} u_{n+1}^{\lambda_{n+1}-\lambda_n},$$

et l'intégrale générale de l'équation proposée s'obtient, par suite, en égalant ces expressions à des constantes arbitraires, après y avoir rétabli les variables primitives à la place des u .

Plaçons-nous maintenant dans le cas où les racines de (8) ne sont pas distinctes. Pour fixer les idées, nous supposons $n = 4$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \mu$. Alors l'équation (7) pourra être réduite à la forme

$$\begin{aligned} \lambda u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + (\alpha u_1 + \lambda u_2) \frac{\partial f}{\partial u_2} + \mu u_3 \frac{\partial f}{\partial u_3} \\ + (\beta u_3 + \mu u_4) \frac{\partial f}{\partial u_4} + (\gamma u_3 + \delta u_4 + \mu u_5) \frac{\partial f}{\partial u_5} = 0, \end{aligned}$$

les u désignant des fonctions linéaires et homogènes des x . Cette équation admet les intégrales suivantes

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \frac{u_2}{u_1} - \frac{\alpha}{\lambda} \log u_1, \quad \varphi_2 = \frac{u_1^\mu}{u_3^\lambda}, \quad \varphi_3 = \frac{u_4}{u_3} - \frac{\beta}{\mu} \log u_3, \\ \varphi_4 = \frac{u_5}{u_3} - \frac{\gamma}{\mu} \log u_3 - \frac{\delta}{\mu} \frac{u_4}{u_3} \log u_3 + \frac{\beta \delta}{2 \mu^2} \log^2 u_3. \end{aligned}$$

D'autre part la condition

$$u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + u_3 \frac{\partial f}{\partial u_3} + u_4 \frac{\partial f}{\partial u_4} + u_5 \frac{\partial f}{\partial u_5} = 0$$

devient, en considérant f comme fonction des φ ,

$$\frac{\alpha}{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} + (\lambda - \mu) \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} + \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial f}{\partial \varphi_3} + \frac{\gamma + \delta \varphi_3}{\mu} \frac{\partial f}{\partial \varphi_4} = 0,$$

équation d'où l'on tire immédiatement les trois intégrales suivantes qui seront homogènes du degré zéro :

$$\begin{aligned} \psi_1 = \beta \varphi_1 - \alpha \varphi_3 + \frac{\alpha \beta}{\lambda \mu} \log \varphi_2 = \beta \frac{u_2}{u_1} - \alpha \frac{u_4}{u_3}, \\ \psi_2 = \frac{\lambda - \mu}{\alpha} \varphi_1 - \frac{1}{\lambda} \log \varphi_2 = \frac{\lambda - \mu}{\alpha} \frac{u_2}{u_1} + \log \frac{u_3}{u_1}, \\ \psi_3 = \beta \varphi_4 - \gamma \varphi_3 - \frac{\delta}{2} \varphi_3^2 = \beta \frac{u_5}{u_3} - \gamma \frac{u_4}{u_3} - \frac{\delta}{2} \left(\frac{u_4}{u_3} \right)^2. \end{aligned}$$

La solution générale du système proposé nous sera donc donnée par les équations

$$\psi_1 = C_1, \quad \psi_2 = C_2, \quad \psi_3 = C_3,$$

où il faudra rétablir les variables primitives.

CALCUL DE LA RÉSISTANCE DES FLUIDES A UN DISQUE MINCE;

Par M. TOUCHE.

Nous avons établi ⁽¹⁾ que, dans des conditions particulières et déterminées, la courbe orthogonale aux trajectoires fluides a pour équation

$$\frac{dx'}{x'} = - \frac{\cos \alpha'}{\sin \alpha'} dz' \left[1 + \left(\frac{ds_1}{ds} \right)^2 \right],$$

x' étant l'abscisse de la courbe orthogonale, α' l'angle d'inclinaison sur l'axe des x de la tangente à cette courbe et $\frac{ds_1}{ds}$ le rapport à l'élément de trajectoire mn ou ds , de l'élément de courbe orthogonale nr ou ds_1 , choisi de telle sorte que l'on ait en r la même pression qu'en m . Cette équation est établie dans le cas particulier où ds_1 est constamment égal à ds'_1 , l'élément de courbe orthogonale nr' ou ds'_1 étant de longueur telle que la tangente en r' à la trajectoire qui passe par ce point soit parallèle à la tangente à la trajectoire qui passe par le point m .

Examinons le cas où le corps est immergé dans un fluide d'une très grande étendue et où ce corps est terminé par une surface conique de dimension très grande. Dans ce cas, l'élément mr' ou nr (puisque mr' n'est autre que nr), pour lequel les tangentes en m et en r aux trajectoires qui passent par ces points sont parallèles, fera partie d'une droite passant par le sommet O du cône, car il n'y a aucune raison pour que, suivant une telle droite, les tangentes aux trajectoires ne soient pas parallèles.

Menons par le point m une parallèle à l'axe des x . Nous voyons

⁽¹⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXI, n° 3, 15 juillet 1895, p. 157. *Calcul des trajectoires fluides*.

que $\frac{nr}{mr}$ ou $\frac{ds_1}{ds}$ est la tangente d'un angle, somme de deux autres, l'un dont la tangente est $\frac{y'}{x'}$ et l'autre dont la tangente est $\frac{dx'}{dy'}$, de telle sorte que $\frac{ds_1}{ds}$ a pour valeur

$$\frac{\frac{y'}{x'} + \frac{dx'}{dy'}}{1 - \frac{dx'}{dy'} \frac{y'}{x'}}.$$

Au lieu du cas général du cône de grande dimension, prenons le cas particulier du disque de grande dimension. Nous avons calculé, pour ce cas, la courbe orthogonale aux trajectoires, en partant du disque, c'est-à-dire de la valeur 90° pour α' , en faisant décroître α' de dix en dix minutes jusqu'à la valeur de $61^\circ 30'$ pour α' , puis de cinq en cinq minutes.

Nous avons trouvé que la courbe orthogonale diffère d'abord peu d'une parabole, qu'elle s'en éloigne ensuite, mais en conservant une courbure bien régulière et qu'elle devient asymptotique à une droite partant du centre O du disque et inclinée sur l'axe des x de l'angle de 56° . Il suit de là que l'impulsion du disque ne s'étend pas à toute la masse fluide, car cette impulsion ne peut se transmettre que suivant les courbes orthogonales aux trajectoires; il reste dans l'intérieur du cône, dont l'arête est inclinée de 34° sur l'axe des y , une portion de cette masse qui n'est pas influencée par le mouvement du disque, et suivant cette arête il doit y avoir une inflexion brusque du fluide.

Si, près de la surface du disque, nous prenons deux petites longueurs égales, l'une sur la courbe trajectoire, l'autre sur la courbe orthogonale, la projection de la première sur l'axe des x étant dx et celle de la seconde dx' , et si nous remarquons que $\frac{ds_1}{ds}$ devient nul près de la surface du disque, ainsi que le montre la valeur obtenue plus haut pour $\frac{ds_1}{ds}$, l'équation de la courbe orthogonale nous donne

$$\frac{dx}{x'} = - dx'.$$

Cette dernière équation montre que la section d'une petite nappe fluide comprise entre le disque et la tangente à la trajectoire inclinée de l'angle dx' sur le disque doit être constante, et par suite que la vitesse doit être constante le long du disque.

Cette vitesse constante doit être celle qui existe après l'inflexion brusque, c'est-à-dire celle qui existe avant l'inflexion brusque, multipliée par $\sin 34^\circ$, car le produit de la vitesse par la surface de section doit être constant pour un même filet fluide.

La pression sur l'unité de surface du disque pour une vitesse du disque égale à 1^m sera

$$\frac{\varphi}{2} (1 - \sin^2 34^\circ),$$

en appelant φ la densité divisée par la valeur g de la pesanteur.

Appliquons cette expression au cas de l'air.

A Paris, à 60 mètres au-dessus du niveau de la mer, à la température zéro et à la pression de $0^m,76$, la densité de l'air est : $1,293187$; la valeur de g est $9^m,80896$.

On trouve alors $0^k8,0453061$ pour la pression sur l'unité de surface de la partie antérieure du disque, relative à la vitesse de 1^m du fluide ambiant. Cette pression correspond à un disque de très grande étendue; mais on peut la considérer comme relative à un disque de grandeur limitée, sans commettre une grande erreur.

A l'arrière d'un disque mince, on a une poupe fluide formée de tourbillons. Au contact d'une poupe fluide et du fluide ambiant, le fluide est entraîné comme l'est le bois rifflé par le fer du rabot, de manière à former un tourbillon. La considération de ce tourbillon détermine la dépression qui a lieu à l'arrière, laquelle, comme nous allons le voir, est indépendante du rayon du tourbillon. Les tourbillons de la poupe fluide se déplacent constamment par rapport au disque, sans que la dépression qu'ils déterminent change sensiblement de valeur.

Considérons donc un tourbillon. En appelant ds^2 une surface élémentaire normale au rayon du tourbillon, dP la différentielle de la pression comptée suivant ce rayon, m la masse du volume

fluide ds^3 , r la portion du tourbillon comprise entre le centre et le point considéré et v la vitesse avec laquelle le fluide se meut dans le tourbillon en décrivant la circonférence de rayon r , il nous vient

$$ds^2 dP = \frac{mv^2}{r}.$$

Or, m a pour valeur ρds^3 et il vient

$$dP = \rho v^2 \frac{dr}{r},$$

la différentielle dr étant prise de longueur égale à ds .

Or, v_1 étant la vitesse à l'extrémité du rayon du tourbillon et r_1 la valeur de r correspondante, on a

$$v = v_1 \frac{r}{r_1}$$

et par suite

$$dP = \rho \frac{v_1^2}{r_1^2} r dr$$

et en intégrant, depuis le centre du tourbillon, jusqu'à l'extrémité du rayon r_1 ,

$$P - P_1 = \frac{\rho}{2} v_1^2,$$

P étant la pression à l'extérieur du tourbillon et P_1 la pression au centre. Remarquons que la dépression $P - P_1$ qui existe à l'arrière du disque est indépendante du rayon du tourbillon.

En appliquant au cas de l'air, nous trouvons pour la dépression $0^{\text{kg}}, 0206125$; cette dépression à l'arrière du disque s'ajoute à la pression de l'avant pour former un total qui représente la résistance. Elle est alors égale à $0^{\text{kg}}, 0659186$.

SUR LES LIGNES ASYMPTOTIQUES;

Par M. E. GOURSAT.

1. Dans un élégant article publié en 1888 dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (p. 126), M. Lelievre a montré que les coordonnées d'un point d'une surface rapportée à ses lignes asymptotiques α, β sont données par les formules

$$(1) \quad \begin{cases} x = \int \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} \right) d\alpha - \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial \beta} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta} \right) d\beta, \\ y = \int \left(\theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha} \right) d\alpha - \left(\theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial \beta} \right) d\beta, \\ z = \int \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} \right) d\alpha - \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} \right) d\beta, \end{cases}$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ étant trois intégrales particulières d'une équation linéaire à invariants égaux (1)

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} = \lambda \theta.$$

Il est facile de déduire des formules de M. Lelievre une infinité de surfaces pour lesquelles on connaît les expressions des coordonnées x, y, z en fonction des paramètres α, β des lignes asymptotiques, sans aucun signe de quadrature. Il suffit pour cela de partir d'une équation (2) intégrable par la méthode de Laplace. Supposons, par exemple, que l'équation (2) soit de rang $n + 1$, de telle façon que l'intégrale générale ait pour expression

$$(3) \quad 0 = A F(\alpha) + A_1 F'(\alpha) + \dots + A_n F^{(n)}(\alpha) + B \Phi(\beta) + \dots + B_n \Phi^{(n)}(\beta),$$

$A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$ étant des fonctions déterminées de α et de β , F et Φ des fonctions arbitraires. On a alors

$$(4) \quad \begin{cases} \theta_1 = A f_1(\alpha) + A_1 f_1'(\alpha) + \dots + A_n f_1^{(n)}(\alpha) + B \varphi_1(\beta) + B_1 \varphi_1'(\beta) + \dots + B_n \varphi_1^{(n)}(\beta), \\ \theta_2 = A f_2(\alpha) + A_1 f_2'(\alpha) + \dots + A_n f_2^{(n)}(\alpha) + B \varphi_2(\beta) + B_1 \varphi_2'(\beta) + \dots + B_n \varphi_2^{(n)}(\beta), \\ \theta_3 = A f_3(\alpha) + A_1 f_3'(\alpha) + \dots + A_n f_3^{(n)}(\alpha) + B \varphi_3(\beta) + B_1 \varphi_3'(\beta) + \dots + B_n \varphi_3^{(n)}(\beta). \end{cases}$$

(1) Voir aussi DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. IV, p. 21 et suiv.

les fonctions $f_1, f_2, f_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ étant toutes arbitraires. Cela posé, je dis qu'on peut mettre les fonctions arbitraires sous une forme telle que toutes les quadratures indiquées par les formules (1) puissent être effectuées. C'est ce qui se déduit aisément d'un théorème général employé par M. Darboux pour les équations à invariants égaux, et qui est d'un usage fréquent dans l'étude des équations linéaires aux dérivées partielles ⁽¹⁾. Considérons les fonctions f_3, φ_3 comme données; la première des formules (1) nous donnera pour x

$$x = \int P \, dx + Q \, d\beta,$$

où P et Q sont des expressions de la forme

$$P = a f_2(x) + a_1 f_2'(x) + \dots + a_{n+1} f_2^{n+1}(x) + b \varphi_2(\beta) + \dots + b_{n+1} \varphi_2^{(n+1)}(\beta),$$

$$Q = c f_2(x) + c_1 f_2'(x) + \dots + c_{n+1} f_2^{(n+1)}(x) + d \varphi_2(\beta) + \dots + d_{n+1} \varphi_2^{(n+1)}(\beta),$$

telles que $P \, dx + Q \, d\beta$ soit une différentielle exacte pour toutes les formes possibles des fonctions f_2, φ_2 . En intégrant par parties un nombre suffisant de fois, on peut ne laisser que $f_2(x)$ dans le coefficient de dx et $\varphi_2(\beta)$ dans le coefficient de $d\beta$, de sorte que x s'écrira

$$x = \zeta + \int [\Omega f_2(x) + \Psi] \, dx + [\Omega' \varphi_2(\beta) + \Psi'] \, d\beta,$$

Ω et Ω' ne contenant pas les fonctions arbitraires, Ψ ne contenant que $\varphi_2(\beta)$ et ses dérivées, et Ψ' ne contenant que $f_2(x)$ et ses dérivées. Enfin ζ s'exprime linéairement au moyen de $f_2(x), \varphi_2(\beta)$ et de leurs dérivées. Comme l'expression sous le signe $\int$ doit être une différentielle exacte, quelles que soient les fonctions $f_2(x), \varphi_2(\beta)$, il faudra que l'on ait, pour toutes les formes possibles de ces fonctions,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \beta} f_2(x) + \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} = \frac{\partial \Omega'}{\partial x} \varphi_2(\beta) + \frac{\partial \Psi'}{\partial x}.$$

Les fonctions Ψ et Ψ' doivent être identiquement nulles: si, par exemple, Ψ n'était pas nul, $\frac{\partial \Psi}{\partial \beta}$ contiendrait au moins une dé-

(1) *Théorie des surfaces*, t. II, n° 393.

rivée de $\varphi_2(\beta)$, et ce terme-là ne se réduirait pas avec un autre. On aura donc $\Psi = \Psi' = 0$, et la relation précédente se réduit à

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \beta} f_2(z) = \frac{\partial \Omega'}{\partial z} \varphi_2(\beta),$$

ce qui montre que Ω ne dépend que de z , tandis que Ω' ne dépend que de β . Si Ω est nul, on a

$$\int \Omega f_2(z) dz = c;$$

si Ω n'est pas nul, il suffira de poser $\Omega f_2(z) = F_2'(z)$, $F_2(z)$ étant une nouvelle fonction arbitraire, pour avoir

$$\int \Omega f_2(z) dz = F_2(z).$$

On aura de même

$$\int \Omega' \varphi_2(\beta) d\beta = c'$$

si $\Omega' = 0$, et

$$\int \Omega' \varphi_2(\beta) d\beta = \Phi_2(\beta).$$

en posant $\Omega' \varphi_2(\beta) = \Phi_2'(\beta)$ si Ω' n'est pas nul. On obtiendra de même la valeur de γ sans aucun signe de quadrature en remplaçant, s'il est nécessaire, les fonctions arbitraires $f_1(z)$ et $\varphi_1(\beta)$ par deux nouvelles fonctions arbitraires $F_1(z)$ et $\Phi_1(\beta)$.

En remplaçant maintenant θ_1 et θ_2 par leurs valeurs dans l'intégrale qui donne z , on a une expression de même forme que les précédentes, où l'on pourra considérer $F_2(z)$ et $\Phi_2(\beta)$ comme données, $F_1(z)$ et $\Phi_1(z)$ comme des fonctions arbitraires, et le même procédé permettra de se débarrasser du signe de quadrature.

Remarquons que la même méthode permet de trouver, sans aucun signe de quadrature, les formules qui résolvent le problème de la déformation infiniment petite pour la surface représentée par les équations (1), lorsque l'équation (2) est intégrable par la méthode de Laplace.

2. Lorsque l'équation (2) se réduit à l'équation élémentaire

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial \beta} = 0,$$

les formules (1) deviennent

$$(5) \quad \begin{cases} x = \varphi_2 f_3 - f_2 \varphi_3 + \int (f_2 f'_3 - f_3 f'_2) dx - \int (\varphi_2 \varphi'_3 - \varphi_3 \varphi'_2) d\beta, \\ y = \varphi_3 f_1 - f_3 \varphi_1 + \int (f_3 f'_1 - f_1 f'_3) dx - \int (\varphi_3 \varphi'_1 - \varphi_1 \varphi'_3) d\beta, \\ z = \varphi_1 f_2 - f_1 \varphi_2 + \int (f_1 f'_2 - f_2 f'_1) dx - \int (\varphi_1 \varphi'_2 - \varphi_2 \varphi'_1) d\beta, \end{cases}$$

f_1, f_2, f_3 étant des fonctions arbitraires de x , et $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ des fonctions arbitraires de β . Pour faire disparaître les quadratures, remarquons que l'on a

$$\begin{aligned} \int (f_2 f'_3 - f_3 f'_2) dx &= f_2 f_3 - \int f_3 f'_2 dx, \\ \int (f_3 f'_1 - f_1 f'_3) dx &= f_1 f_3 - \int f_1 f'_3 dx, \\ \int (f_1 f'_2 - f_2 f'_1) dx &= \int f_1 f'_2 dx - f_1 f_2; \end{aligned}$$

si l'on pose

$$f_1(x) = \frac{F'_1(x)}{f'_2(x)}, \quad f_3(x) = \frac{F'_3(x)}{f'_2(x)},$$

il ne reste plus qu'un signe de quadrature dans l'intégrale

$$\int \frac{F'_1(x)}{f'_2(x)} \frac{d}{dx} \left[\frac{F'_3(x)}{f'_2(x)} \right] dx,$$

que l'on peut encore écrire

$$\frac{F_1(x)}{f'_2(x)} \frac{d}{dx} \left[\frac{F'_3(x)}{f'_2(x)} \right] - \int F_1(x) \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{f'_2(x)} \frac{d}{dx} \left[\frac{F'_3(x)}{f'_2(x)} \right] \right\} dx,$$

et il suffira de poser

$$F_1(x) \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{f'_2(x)} \frac{d}{dx} \left[\frac{F'_3(x)}{f'_2(x)} \right] \right\} = \tilde{\pi}'_1(x)$$

pour n'avoir plus aucune quadrature. Il restera trois fonctions arbitraires $f_2(x)$, $F_3(x)$, $\tilde{\pi}_1(x)$. On opérera de la même façon pour faire disparaître les autres quadratures.

Prenons, par exemple,

$$\theta_1 = f'(x) + \varphi'(\beta), \quad \theta_2 = x - \beta, \quad \theta_3 = 1;$$

on trouve pour coordonnées d'un point de la surface correspondante

$$\begin{aligned}x &= \alpha + \beta, \\y &= f'(\alpha) + \varphi'(\beta), \\z &= (\alpha - \beta)[f'(\alpha) + \varphi'(\beta)] - 2f(\alpha) + 2\varphi(\beta).\end{aligned}$$

Toutes ces surfaces satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$rt - s^2 + 1 = 0;$$

les lignes asymptotiques de chacun des systèmes se projettent sur le plan des xy suivant des courbes égales qui se déduisent de l'une d'elles par une translation.

3. On peut rattacher aux considérations précédentes la solution d'un problème relatif aux lignes asymptotiques d'une surface réglée, dont M. Kœnigs a déjà donné une solution élégante ⁽¹⁾. Supposons que la surface représentée par les formules (1) soit une surface réglée, et que les courbes $\alpha = \text{const.}$ soient précisément les génératrices de cette surface. On déduit de ces formules

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\theta_1}{\theta_3}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\theta_2}{\theta_3},$$

de sorte que $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont proportionnels aux cosinus directeurs de la normale à la surface. Lorsque le point (x, y, z) décrit une génératrice, cette normale reste parallèle à un plan fixe, et l'on a entre $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ une relation de la forme

$$(6) \quad A\theta_1 + B\theta_2 + C\theta_3 = 0,$$

les coefficients A, B, C ne dépendant que de la variable α . Il résulte d'une proposition générale que j'ai démontrée récemment ⁽²⁾ que l'équation (2) est nécessairement du premier ou du second rang. Laissant de côté le cas où l'équation (2) est du premier rang, hypothèse qui ne donne que des surfaces réglées à plan directeur, je considère une équation du second rang de la

⁽¹⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CVI; 1888, p. 51-54.

⁽²⁾ *Sur les équations linéaires et la méthode de Laplace* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 27 janvier 1896).

forme (2); en choisissant convenablement les variables α et β , on peut supposer que cette équation a été ramenée à la forme canonique

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{-2\theta}{(\alpha - \beta)^2},$$

dont l'intégrale générale est

$$(8) \quad \theta = 2 \frac{f(\alpha) - \varphi(\beta)}{\alpha - \beta} - f'(\alpha) - \varphi'(\beta).$$

Il résulte aussi de la proposition que je viens de rappeler que $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ s'obtiendront en prenant la fonction arbitraire $\varphi(\beta) = 0$. On aura donc

$$(9) \quad \theta_1 = \frac{2f_1(\alpha)}{\alpha - \beta} - f'_1(\alpha), \quad \theta_2 = \frac{2f_2(\alpha)}{\alpha - \beta} - f'_2(\alpha), \quad \theta_3 = \frac{2f_3(\alpha)}{\alpha - \beta} - f'_3(\alpha),$$

f_1, f_2, f_3 étant des fonctions arbitraires. Les formules (1) deviennent, toutes réductions faites,

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \frac{f_3 f'_2 - f'_3 f_2}{\alpha - \beta} + \int (f'_2 f''_3 - f''_2 f'_3) d\alpha, \\ y = 2 \frac{f_1 f'_3 - f'_1 f_3}{\alpha - \beta} + \int (f'_3 f''_1 - f''_3 f'_1) d\alpha, \\ z = 2 \frac{f_2 f'_1 - f'_2 f_1}{\alpha - \beta} + \int (f'_1 f''_2 - f''_1 f'_2) d\alpha; \end{array} \right.$$

on reconnaît immédiatement, sur ces formules, que la surface est réglée et que les courbes $\alpha = \text{const.}$ sont les génératrices. Pour faire disparaître les quadratures, remarquons qu'on a, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int (f'_2 f''_3 - f''_2 f'_3) d\alpha &= 2f_2 f''_3 - f'_2 f'_3 - 2 \int f_2 f'''_3 d\alpha, \\ \int (f'_3 f''_1 - f''_3 f'_1) d\alpha &= f'_1 f'_3 - 2f_1 f''_3 + 2 \int f_1 f'''_3 d\alpha, \\ \int (f'_1 f''_2 - f''_1 f'_2) d\alpha &= 2f_1 f''_2 - f'_1 f'_2 - 2 \int f_1 f'''_2 d\alpha, \end{aligned}$$

et tout se réduit à mettre les fonctions arbitraires $f_1(\alpha), f_2(\alpha),$

$f_3(x)$ sous une forme telle que les trois quadratures

$$\int f_2 f_3''' dx, \quad \int f_1 f_3''' dx, \quad \int f_1 f_2''' dx$$

puissent être effectuées. On y arrive comme il suit : écrivons

$$f_1(x) = \frac{F_1'(x)}{f_3'''(x)}, \quad f_2(x) = \frac{F_2'(x)}{f_3'''(x)},$$

$F_1(x)$ et $F_2(x)$ étant deux nouvelles fonctions arbitraires; il vient alors

$$\int f_1 f_3''' dx = F_1(x), \quad \int f_2 f_3''' dx = F_2(x),$$

$$\int f_1 f_2''' dx = \int \frac{F_1'(x)}{f_3'''(x)} \frac{d^3}{dx^3} \left[\frac{F_2'(x)}{f_3'''(x)} \right] dx,$$

ou, en intégrant encore une fois par parties,

$$\int f_1 f_2''' dx = \frac{F_1(x)}{f_3'''(x)} \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{F_2'}{f_3'''} \right) - \int F_1(x) \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{f_3'''} \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{F_2'}{f_3'''} \right) \right] dx,$$

et il suffira de poser

$$F_1(x) \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{f_3'''} \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{F_2'}{f_3'''} \right) \right] = \tilde{F}_1'(x)$$

pour n'avoir plus aucun signe de quadrature. Les fonctions arbitraires qui figurent dans les nouvelles formules sont

$$\tilde{F}_1(x), \quad F_2(x), \quad f_3(x).$$

4. Si la surface (S) est du second degré, l'équation (2) est encore du rang deux, sauf dans le cas du paraboloïde, que nous laisserons de côté, et les trois intégrales particulières θ_1 , θ_2 , θ_3 doivent vérifier deux relations de la forme

$$(11) \quad \begin{cases} A(x)\theta_1 + B(x)\theta_2 + C(x)\theta_3 = 0, \\ A_1(\beta)\theta_1 + B_1(\beta)\theta_2 + C_1(\beta)\theta_3 = 0. \end{cases}$$

L'équation (2) ayant été mise sous la forme normale

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial \beta} = \frac{-2\theta}{(x-\beta)^2},$$

on obtiendra trois intégrales $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ satisfaisant à des relations de la forme (11) en prenant, dans la formule qui donne l'intégrale générale,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1, & \varphi_1(\beta) &= 0, \\ f_2(x) &= a_2 x^2 + 2b_2 x + c_2, & \varphi_2(\beta) &= 0, \\ f_3(x) &= a_3 x^2 + 2b_3 x + c_3, & \varphi_3(\beta) &= 0, \end{aligned}$$

$a_1, a_2, a_3, \dots, c_3$ étant des constantes. On trouve ainsi

$$(12) \quad \begin{cases} \theta_1 = 2 \frac{a_1 x \beta + b_1(x + \beta) + c_1}{x - \beta}, \\ \theta_2 = 2 \frac{a_2 x \beta + b_2(x + \beta) + c_2}{x - \beta}, \\ \theta_3 = 2 \frac{a_3 x \beta + b_3(x + \beta) + c_3}{x - \beta}. \end{cases}$$

On obtiendrait les mêmes expressions de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ en prenant

$$\begin{aligned} f_1 &= 0, & \varphi_1 &= -(a_1 \beta^2 + 2b_1 \beta + c_1), \\ f_2 &= 0, & \varphi_2 &= -(a_2 \beta^2 + 2b_2 \beta + c_2), \\ f_3 &= 0, & \varphi_3 &= -(a_3 \beta^2 + 2b_3 \beta + c_3). \end{aligned}$$

Les trois intégrales particulières $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ vérifient donc les deux relations

$$\begin{vmatrix} \theta_1, a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1, & a_1 x + b_1 \\ \theta_2, a_2 x^2 + 2b_2 x + c_2, & a_2 x + b_2 \\ \theta_3, a_3 x^2 + 2b_3 x + c_3, & a_3 x + b_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \theta_1, a_1 \beta^2 + 2b_1 \beta + c_1, & a_1 \beta + b_1 \\ \theta_2, a_2 \beta^2 + 2b_2 \beta + c_2, & a_2 \beta + b_2 \\ \theta_3, a_3 \beta^2 + 2b_3 \beta + c_3, & a_3 \beta + b_3 \end{vmatrix} = 0;$$

on en conclut aisément que le plan représenté par l'une ou l'autre de ces équations reste tangent à un cône du second degré, comme cela doit être.

Les formules (10) deviennent, en négligeant une constante que l'on peut toujours ajouter à x, y, z ,

$$(13) \quad \begin{cases} x = 1 \frac{(a_2 b_3 - a_3 b_2) x \beta + \frac{a_2 c_3 - a_3 c_2}{2} (x + \beta) + b_2 c_3 - c_2 b_3}{x - \beta}, \\ y = 1 \frac{(a_3 b_1 - a_1 b_3) x \beta + \frac{a_3 c_1 - a_1 c_3}{2} (x + \beta) + b_3 c_1 - c_3 b_1}{x - \beta}, \\ z = 1 \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1) x \beta + \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{2} (x + \beta) + b_1 c_2 - c_1 b_2}{x - \beta}. \end{cases}$$

Les formules qui définissent une surface (S_1) correspondant à la surface du second degré par orthogonalité des éléments deviennent de même, après réduction,

$$(14) \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{4(a_1\beta + b_1)F(x) - 4(a_1x + b_1)\Phi(\beta) - 2[a_1x\beta + b_1(x + \beta) + c_1][F'(x) - \Phi'(\beta)]}{x - \beta}, \\ y_1 &= \frac{4(a_2\beta + b_2)F(x) - 4(a_2x + b_2)\Phi(\beta) - 2[a_2x\beta + b_2(x + \beta) + c_2][F'(x) - \Phi'(\beta)]}{x - \beta}, \\ z_1 &= \frac{4(a_3\beta + b_3)F(x) - 4(a_3x + b_3)\Phi(\beta) - 2[a_3x\beta + b_3(x + \beta) + c_3][F'(x) - \Phi'(\beta)]}{x - \beta}, \end{aligned} \right.$$

$F(x)$ et $\Phi(\beta)$ étant deux fonctions arbitraires.

SURFACES RAPPORTÉES A UN RÉSEAU CONJUGUÉ AZIMUTAL;

Par M. L. RAFFY.

1. Nous nous proposons d'étudier ici quelques applications d'un système de coordonnées curvilignes qui peut servir dans bien d'autres cas et qui dérive d'une proposition due à M. Kœnigs : *les sections faites dans une surface par des plans contenant une droite fixe et les courbes de contact des cônes circonscrits qui ont leurs sommets sur cette droite forment un réseau conjugué*. Pour rapporter une surface aux courbes d'un tel réseau, qu'on pourrait appeler *réseau conjugué azimutal*, il suffit de la considérer comme l'enveloppe des cônes circonscrits

$$\frac{z - v}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}, v\right),$$

qui ont leur sommet sur l'axe Oz . Posons

$$\frac{y}{x} = u, \quad \frac{z - v}{x} = \varphi(u, v);$$

la surface sera définie par ces deux équations, jointes à l'équation dérivée

$$-\frac{1}{x} = \varphi'_v.$$

On a donc, en résolvant ce système,

$$(1) \quad x = -\frac{1}{\varphi'_v}, \quad y = -\frac{u}{\varphi'_v}, \quad z = v - \frac{\varphi}{\varphi'_v}.$$

Les coefficients de l'élément linéaire ont par suite pour expressions

$$\begin{aligned} E &= [(1 + u^2 + \varphi^2) \varphi''_{uv} - 2(u + \varphi \varphi'_u) \varphi'_v \varphi''_{uv} + (1 + \varphi'^2_u) \varphi'^2_v] \varphi'^{-4}_v, \\ F &= [(1 + u^2 + \varphi^2) \varphi''_{uv} - (u + \varphi \varphi'_u) \varphi'_v] \varphi''_{v^2} \varphi'^{-4}_v, \\ G &= (1 + u^2 + \varphi^2) \varphi''_{v^2} \varphi'^{-4}_v. \end{aligned}$$

On a pareillement pour les coefficients de la seconde forme fondamentale

$$D = -\varphi''_{u^2} \varphi''_{v^2} \varphi'^{-4}_v, \quad D' = 0, \quad D'' = \varphi''_{v^2} \varphi'^{-4}_v,$$

en sorte que les lignes asymptotiques de la surface (1) ont pour équation différentielle

$$\varphi''_{u^2} du^2 - \varphi''_{v^2} dv^2 = 0,$$

ce qui permettrait d'indiquer nombre de surfaces dont on déterminerait les lignes asymptotiques par des quadratures.

2. *Surfaces de Joachimsthal.* — Nous allons très simplement déterminer toutes les surfaces admettant pour lignes de courbure d'un système des courbes planes dont les plans passent par une droite fixe. En effet, cette droite étant prise pour axe des z , les lignes de courbure du second système, devant former avec les premières un réseau conjugué, seront les courbes de contact des cônes circonscrits qui ont leurs sommets sur Oz . Pour avoir les surfaces cherchées, il nous suffira donc d'exprimer que le système conjugué (u, v) est orthogonal, c'est-à-dire d'égaliser F à zéro. Il n'y a pas lieu de s'arrêter à la solution $\varphi''_{v^2} = 0$, car, d'après les formules (1), la surface se réduit alors à une courbe, ses trois coordonnées ne dépendant que de la seule variable u . Soit donc

$$\frac{\varphi''_{uv}}{\varphi'_v} = \frac{u + \varphi \varphi'_u}{1 + u^2 + \varphi^2}.$$

Les deux membres de cette équation étant des dérivées logarith-

miques, on en tire

$$V'^2(1+u^2+\varphi^2)=\varphi'^2,$$

$$V=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1+u^2+\varphi^2}},$$

en désignant par V une fonction arbitraire de v . Effectuons maintenant la quadrature indiquée et soit U une fonction arbitraire de u ; nous aurons

$$\varphi=\sqrt{1+u^2}\frac{e^{V-U}-e^{U-V}}{2}.$$

Pour abréger, posons suivant l'usage

$$\frac{e^{\omega}-e^{-\omega}}{2}=\text{Sh } \omega, \quad \frac{e^{\omega}+e^{-\omega}}{2}=\text{Ch } \omega,$$

les seconds membres étant les *sinus* et *cosinus hyperboliques* de ω . Les surfaces de Joachimsthal seront représentées par les formules

$$x=\frac{-1}{V'\sqrt{1+u^2}\text{Ch}(V-U)}, \quad y=\frac{-u}{V'\sqrt{1+u^2}\text{Ch}(V-U)}, \quad z=v-\frac{\text{Sh}(V-U)}{V'\text{Ch}(V-U)}.$$

On voit que les lignes de courbure du second système ($v=\text{const.}$) sont tracées sur des sphères

$$x^2+y^2+(z-v)^2=\frac{1}{V'^2}.$$

Si l'on pose $r=\sqrt{x^2+y^2}$, une ligne de courbure $u=\text{const.}$ sera définie dans son plan par les deux équations

$$(2) \quad r=\frac{1}{V'\text{Ch}(V-U)}, \quad z=v-r\text{Sh}(V-U),$$

qui représentent, quand u varie ainsi que v , tous les points du plan zOr . Les lignes $v=\text{const.}$ constituent l'ensemble des cercles qui ont leur centre sur Oz

$$(z-v)^2+r^2=\frac{1}{V'^2}.$$

Les lignes $u=\text{const.}$ sont leurs trajectoires orthogonales; car le

coefficient angulaire de la normale à l'un des cercles considérés est

$$\frac{z-v}{r} = -\operatorname{Sh}(V-U)$$

et celui de la tangente à la courbe $u = \text{const.}$ est

$$\frac{z'_v}{r'_v} = \frac{1 - rV' \operatorname{Ch}(V-U) - r'_v \operatorname{Sh}(V-U)}{r_v} = -\operatorname{Sh}(V-U).$$

D'autre part, on peut considérer U comme un paramètre variable; alors u devient une fonction arbitraire de U ; d'où la génération suivante des surfaces de Joachimsthal :

On considère une famille quelconque de cercles ayant leur centre sur Oz , et tracés dans le plan zOx , ainsi que leurs trajectoires orthogonales. On fait tourner chacune de ces trajectoires autour de Oz , d'un angle qui varie, d'après une loi arbitrairement choisie, quand on passe de l'une à l'autre; le lieu de ces diverses courbes ainsi déplacées est la surface cherchée.

Un raisonnement géométrique simple, que l'on trouvera dans la *Théorie des surfaces* de M. Darboux (t. I, pp. 112-117), conduit à cette génération. Mais nous avons de plus l'expression analytique *explicite et sans quadratures* des coordonnées de la surface. Remarquons encore que les formules (2) donnent la solution de ce problème : *Trouver dans le plan les trajectoires orthogonales d'une famille quelconque de cercles ayant leurs centres en ligne droite.*

3. *Détermination des surfaces qui présentent un réseau conjugué azimutal à invariants égaux.* — Le réseau (u, v) étant conjugué, on sait que les trois coordonnées x, y, z des surfaces (1) satisfont à une équation de la forme

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = B \frac{\partial \theta}{\partial u} + B_1 \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Pour trouver B et B₁, écrivons

$$(4) \quad \begin{cases} x''_{uv} = Bx'_u + B_1x'_v, \\ y''_{uv} = By'_u + B_1y'_v. \end{cases}$$

Mais en vertu de la relation $y = ux$, on a

$$y'_u = ux'_u + x, \quad y'_v = ux'_v, \quad y''_{uv} = ux''_{uv} + x'_v.$$

Substituons ces dérivées dans la seconde des équations (4) en tenant compte de la première; il reste

$$B = \frac{x'_v}{x}.$$

Portons cette valeur de B dans l'équation (3); nous en tirons

$$B_1 = \frac{xx''_{uv} - x'_ux'_v}{xx'_v} = \frac{x}{x'_v} \left(\frac{x'_v}{x} \right)'_u = \frac{\partial \log B}{\partial u}.$$

Comme la première équation (1) donne x en fonction de φ et de φ_v nous aurons

$$(5) \quad B = - \frac{\partial \log \varphi'_v}{\partial v}, \quad B_1 = \frac{\partial \log B}{\partial u}.$$

On voit que B dépend des dérivées secondes et B₁ des dérivées troisièmes de φ .

Cherchons à déterminer la fonction φ de manière que le réseau (u, v) soit un réseau à *invariants égaux*, c'est-à-dire que l'on ait

$$(6) \quad \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}.$$

C'est là une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre. Pour l'intégrer, déterminons B, qui satisfait par hypothèse à l'équation

$$(6') \quad \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial^2 \log B}{\partial u \partial v}.$$

De là on déduit, en désignant par V une fonction arbitraire de v ,

$$B = \frac{B'_v}{B} - \frac{V'''}{V''},$$

$$\frac{V''B'_v - BV'''}{B^2} = V''.$$

Intégrons et représentons par U une fonction arbitraire de u ; il viendra

$$B = \frac{V''}{U - V'}.$$

Remplaçons maintenant B par son expression (5); nous aurons

$$\frac{\partial \log \varphi'_v}{\partial v} = \frac{V''}{V' - U}.$$

Par deux intégrations successives, qui introduisent deux nouvelles fonctions arbitraires, U_0 et U_1 , de la variable u , on trouve finalement

$$\varphi = U_0(Uv - V) + U_1.$$

Grâce à cette détermination de φ , les formules (1) deviennent

$$x = \frac{1}{U_0(V' - U)}, \quad y' = \frac{u}{U_0(V' - U)}, \quad z = \frac{U_0(vV' - V) + U_1}{U_0(V' - U)}.$$

Elles représentent *toutes les surfaces sur lesquelles existe un réseau conjugué azimutal à invariants égaux*. L'équation (3), que vérifient les coordonnées x, y', z de ces surfaces, se réduit à

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} [(V' - U)\vartheta] = 0,$$

comme on le reconnaît par un calcul facile.

Si, dans les formules que nous venons d'obtenir, on suppose $U = 0$, l'élimination de u et v peut être effectuée et l'on arrive à une équation de la forme

$$z = x f\left(\frac{y}{x}\right) + F\left[x \Psi\left(\frac{y}{x}\right)\right],$$

où les trois symboles f , F et Ψ désignent des fonctions arbitraires. Dans ce type rentrent diverses classes de surfaces connues.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 1^{er} AVRIL 1896.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. Désiré André : *Sur une formule d'Analyse combinatoire.*

M. Raffy : *Sur la méthode de quadrature de Gauss.*

M. D'OCAGNE adresse une Note *Sur la représentation nomographique des équations du second degré à trois variables.*

SÉANCE DU 10 AVRIL 1896.

PRÉSIDENCE DE M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

Communications :

M. Paul DUPUY donne lecture d'une *Notice sur la vie et les travaux d'Évariste Galois.*

SÉANCE DU 15 AVRIL 1896.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. Beudon : *Sur certains systèmes complètement intégrables d'équations aux dérivées partielles.*

M. Lecornu : *Sur un problème de Géométrie relatif à la théorie de la bicyclette.*

M. MAILLET adresse une *Note sur les groupes de substitutions.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

REMARQUES ALGÈBRIQUES SUR LES FONCTIONS DÉFINIES PAR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE;

Par M. MICHEL PETROVITCH.

1. Les remarques qui suivent concernent les valeurs réelles de la variable indépendante x , pour lesquelles les intégrales d'une équation différentielle algébrique de premier ordre peut prendre des valeurs fixes, données à l'avance. Dans tout ce qui suit, je supposerai cette valeur fixe égale à zéro ou à l'infini; on y ramène facilement les cas où il n'en est pas ainsi. Ces remarques s'appliquent également aux valeurs réelles de x , qui rendent les intégrales réelles maximum ou minimum, pour leurs points d'inflexion, leurs directions asymptotiques, etc.

Dans un travail antérieur j'ai donné, sous une forme simple et pratique, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les zéros ou les infinis de l'intégrale ne varient pas avec la constante d'intégration, et un procédé simple pour calculer les ordres des zéros et des infinis mobiles. Voici les résultats principaux trouvés à cet égard.

Soit

$$F(x, y, y') = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x) y^{m_i} y'^{n_i}$$

un polynome en y et y' , où les m_i et les n_i sont des entiers positifs et les $\varphi_i(x)$ des fonctions quelconques de x . Formons le tableau de $2s$ nombres entiers et positifs

$$M_i = m_i + n_i, \quad N_i = n_i,$$

et traçons dans le plan deux axes : sur l'un, nous compterons les M_i et sur l'autre les N_i , et marquons les s points (M_i, N_i) . Par les points le plus rapproché et le plus éloigné de ON , traçons une ligne polygonale brisée, dont chaque sommet serait (M_i, N_i) , et telle qu'aucun point (M_i, N_i) ne soit au-dessus d'elle.

Ceci étant, envisageons l'équation différentielle

$$(1) \quad F(x, y, y') = 0.$$

I. Pour que l'intégrale générale de (1) ait des zéros mobiles d'ordre λ , il faut et il suffit que la ligne polygonale de F ait un côté de coefficient angulaire λ .

II. Pour qu'elle ait des infinis mobiles d'ordre λ , il faut et il suffit que le polygone ait un côté de coefficient angulaire $-\lambda$.

D'après ces théorèmes, si le polygone de F n'a pas de côté à coefficient angulaire positif, les zéros de l'intégrale ne varient pas avec la constante d'intégration, et j'ai montré, d'ailleurs, comment on peut les calculer tous dans ce cas. Mais, s'il y a de tels côtés, ces zéros varient certainement avec la constante et leur étude est alors impossible dans le cas général, ne connaissant ni la façon dont la constante d'intégration (par exemple la valeur $y = y_0$ pour $x = x_0$) entre dans l'expression de l'intégrale générale, ni la forme de cette intégrale, considérée comme fonction de x . C'est dans ce cas que les remarques simples qui suivent peuvent présenter quelque intérêt.

2. Supposons que le polygone de F n'ait aucun côté à coefficient angulaire compris entre 0 et 1. Désignons par $F_1(x, y, y')$ l'ensemble de termes dans F contenant y , et par $F_2(x, y')$ l'ensemble de termes sans y , de sorte qu'on ait

$$F(x, y, y') = F_1(x, y, y') + F_2(x, y').$$

Alors, dans tout intervalle réel de $x = a$ jusqu'à $x = b$, dans lequel la courbe $F_2(x, y') = 0$ (où l'on considère x et y' comme coordonnées des points de la courbe) n'a aucune branche réelle, les zéros des intégrales réelles sont fixes et doivent rendre infinie au moins une fonction $\varphi_i(x)$.

Il suffit, pour le voir, de remarquer que, le polygone de F n'ayant aucun côté à coefficient angulaire compris entre 0 et 1, l'intégrale y ne peut avoir des zéros mobiles dont l'ordre serait compris entre 0 et 1, et que, par suite, aucune valeur $x = \alpha$, finie, ne coïncidant avec au moins un infini des fonctions $\varphi_i(x)$ et annulant y , ne peut rendre infinie la dérivée y' . On en conclut

que la valeur de y' pour $x = z$ est racine de l'équation

$$F_2(z, y') = 0.$$

Et comme, lorsque z varie de a jusqu'à b , les racines de cette équation sont imaginaires, la proposition est démontrée.

Ainsi, par exemple, si, la condition du polygone étant remplie, l'équation différentielle étant de degré pair en y' et mise sous la forme

$$F(x, y, y') = \sum_{i=0}^{i=p} f_i(x, y) y'^{p-i} = 0,$$

tous les $f_i(x, 0)$ ayant les indices d'une certaine parité sont nuls, et tous les autres, de parité contraire, différents de zéro et de même signe lorsque x varie de $x = a$ jusqu'à $x = b$, chacun des polynômes en y'

$$F(x, 0, y'), \quad F(x, 0, -y')$$

ne présentera que des permanences lorsque x varie dans l'intervalle (a, b) ; pour tout zéro $x = z$ de y' , compris dans cet intervalle et ne coïncidant avec aucun infini fixe d'une des fonctions $f_i(x, 0)$, les valeurs correspondantes de y' sont donc imaginaires, d'après le théorème de Descartes, et, par suite, les zéros de y' dans l'intervalle (a, b) seront fixes et connus à l'avance.

De même, envisageons l'équation

$$P(x, y)y'^2 + Q(x, y)y' + S(x, y) = 0,$$

et soient m, n, p les exposants les plus petits de y dans P, Q, S . Le polygone de F n'aura aucun côté à coefficient angulaire compris entre 0 et 1 si la condition $p \leq n \leq m$ est remplie. Moyennant cette condition, dans tout intervalle de $x = a$ jusqu'à $x = b$, dans lequel la fonction

$$[Q(x, 0)]^2 - 4P(x, 0)S(x, 0)$$

est constamment négative, les intégrales réelles ne peuvent avoir que des zéros fixes, coïncidant avec au moins un des infinis des fonctions en x , figurant comme coefficients dans P, Q, S .

3. Envisageons maintenant les intégrales réelles, *uniformes* dans un intervalle donné, des équations du premier ordre. Ce qui suit s'appliquerait d'ailleurs également aux intégrales non uniformes dans l'intervalle considéré, mais n'ayant pour chaque valeur de x , comprise dans cet intervalle, qu'une seule valeur réelle.

En écrivant l'équation sous la forme

$$F(x, y, y') = \sum_{i=0}^{i=\mu} f_i(x, y) y'^{\mu-i} = 0,$$

on peut, sans faire aucune hypothèse sur le polygone de l'équation, faire la remarque suivante :

Si pour les valeurs de x comprises entre a et b toutes les fonctions $f_i(x, 0)$ non nulles et dont les indices sont d'une même parité ont constamment le même signe et $f_{\mu}(x, 0) \neq 0$, deux zéros consécutifs d'une intégrale particulière quelconque, réelle et uniforme dans l'intervalle (a, b) , comprennent au moins un pôle de la même intégrale: toute intégrale réelle holomorphe dans cet intervalle ne peut s'annuler plus d'une fois entre a et b .

Car si $x = \alpha$ et $x = \beta$ étaient deux zéros consécutifs de $y(x)$, compris entre a et b , et si aucun pôle de y n'est compris dans l'intervalle (α, β) , le produit

$$y'(\alpha) y'(\beta)$$

doit être négatif ou nul, d'après le théorème de Rolle. Or, les conditions précédentes étant remplies, si tous les $f_i(x, 0)$ étaient de même signe dans l'intervalle (a, b) , les premiers membres des équations algébriques en y'

$$(2) \quad \begin{cases} f_0(\alpha, 0) y'(\alpha)^{\mu} + f_1(\alpha, 0) y'(\alpha)^{\mu-1} + \dots + f_{\mu}(\alpha, 0) = 0, \\ f_0(\beta, 0) y'(\beta)^{\mu} + f_1(\beta, 0) y'(\beta)^{\mu-1} + \dots + f_{\mu}(\beta, 0) = 0 \end{cases}$$

ne présenteraient que des permanences, et, par conséquent, aucune des quantités $y'(\alpha)$ et $y'(\beta)$ ne saurait être réelle et positive; si, au contraire, les $f_i(x, 0)$, correspondant aux indices des parités différentes, sont de signes différents, les équations (2),

après y avoir changé y' en $-y'$, ne présenteraient que des permanences, et, par suite, aucune des quantités $y'(z)$ et $y'(\beta)$ ne saurait être réelle et négative. Donc le produit $y'(z)y'(\beta)$ ne saurait être négatif, ce qui démontre la proposition.

4. Supposons que, les conditions du paragraphe précédent étant remplies, le polygone de F n'ait aucun côté à coefficient angulaire entier négatif. Alors, d'après le théorème énoncé au début, les pôles de toute intégrale particulière uniforme sont fixes et connus à l'avance : soient

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

ces pôles. Dans tout intervalle (a, b) satisfaisant aux conditions du n° 3 et ne comprenant aucune valeur a_i , une intégrale uniforme quelconque ne peut avoir plus d'un zéro, d'où le résultat suivant :

Si le polygone de l'équation $F = 0$ n'a aucun côté à coefficient angulaire entier négatif, et si le nombre de valeurs a_i , compris dans un intervalle (a, b) supposé remplissant les conditions du numéro précédent, est k , une intégrale réelle uniforme quelconque ne peut s'annuler plus de $k + 1$ fois dans l'intervalle (a, b) .

Appliquons ces considérations à l'équation du premier degré

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

où P et Q sont deux polynômes en x et y de degrés respectifs m et n . Pour que le polygone n'ait aucun côté à coefficient angulaire entier négatif, il faut et il suffit que $m \neq n + 2$. Il est d'ailleurs facile à voir que, dans ce cas, les pôles a_i de y sont fixes et l'on peut en trouver toutes les valeurs possibles ; car, si l'on pose $y = \frac{1}{z}$, l'équation se transforme en

$$z^{m-n-2} \frac{dz}{dx} = \frac{P_1(x, z)}{Q_1(x, z)},$$

où P_1 et Q_1 sont des polynômes en z , ne contenant aucune puissance de z en facteur. Comme la dérivée $\frac{dz}{dx}$ doit rester finie pour

$x = a_i$, car a_i est un zéro d'un ordre entier pour z . on voit que

1° Si $m > n + 2$, les a_i sont racines de $P_1(a_i, 0) = 0$;

2° Si $m < n + 2$, les a_i sont racines de $Q_1(a_i, 0) = 0$.

Supposons, pour fixer les idées, que $m > n + 2$; on calculerait alors toutes les valeurs possibles a_i , comme on vient de le voir. On peut toujours supposer que $P(x, 0)$ n'est pas identiquement nul, car, s'il en était ainsi, tous les zéros de l'intégrale générale, sans faire aucune hypothèse sur sa nature, seraient fixes, faciles à calculer et il n'en serait plus question. En effet, on aurait alors

$$P(x, y) = yT(x, y),$$

où T est également un polynôme en x et y , et l'équation (3), qu'on peut alors écrire sous la forme

$$y' = e^{\int \frac{T(x, y)}{Q(x, y)} dx},$$

montre que tout zéro de y est une racine de $Q(x, 0) = 0$.

Supposons donc que $P(x, y)$ ne contient pas y en facteur. Les zéros simples de y sont alors mobiles, mais les zéros multiples b_i sont fixes et sont racines de l'équation $P(x, 0) = 0$.

Soit (a, b) un intervalle réel, ne contenant aucune des valeurs fixes et connues a_i et b_i et tel que la fraction rationnelle en x

$$(4) \quad \frac{P(x, 0)}{Q(x, 0)}$$

garde un signe invariable lorsque x varie de a jusqu'à b . Alors aucune intégrale réelle, uniforme dans cet intervalle, ne peut s'annuler plus d'une fois entre a et b . Car si α et β étaient deux zéros consécutifs dans cet intervalle, comme ils ne peuvent être que des zéros simples, il faudrait, d'après le théorème de Rolle, que le produit

$$y'(\alpha)y'(\beta) = \frac{P(\alpha, 0)P(\beta, 0)}{Q(\alpha, 0)Q(\beta, 0)},$$

soit négatif, ou que α et β comprennent au moins un pôle de y , ce qui n'est pas.

Si l'intervalle (a, b) comprenait k valeurs a_i , racines de

$P_1(x, 0) = 0$ sans comprendre aucune valeur b_i et sans changer de signe entre a et b , l'intégrale y s'annulerait au plus $k + 1$ fois dans cet intervalle.

Si l'on cherchait la limite supérieure du nombre de zéros compris dans un intervalle quelconque (a, b) , on le fractionnera en sous-intervalles, dans lesquels il n'y a aucune valeur a_i, b_i et dans lesquels la fraction rationnelle (4) garde un signe invariable. Si λ est le nombre de tels sous-intervalles, le nombre de zéros simples, compris dans l'intervalle (a, b) , sera au plus égal à λ , et en y ajoutant le nombre μ de zéros multiples b_i , compris entre a et b , on obtient $\lambda + \mu$ comme limite supérieure du nombre total des zéros de y dans cet intervalle.

Ces remarques simples s'appliquent à bien d'autres types d'équations et, en particulier, toutes les fois que y' , définie par l'équation

$$F(x, 0, y') = 0,$$

n'a pour chaque valeur de x , comprise entre a et b , qu'une seule valeur réelle. Le raisonnement s'applique également lorsque y' a plusieurs déterminations réelles pour $y = 0$, et pour des valeurs de x variant dans l'intervalle (a, b) , pourvu que toutes ces déterminations aient le même signe dans cet intervalle. Il est facile d'énoncer, pour ces équations, des conditions suffisantes, pour que les zéros et les infinis d'une intégrale, méromorphe dans un intervalle donné, se séparent mutuellement à la façon de la fonction $\tan x$, etc.

§. Arrêtons-nous maintenant sur l'équation de Riccati qui, par sa forme spéciale et par ses relations étroites avec les équations linéaires, permet une étude plus détaillée des zéros et des infinis réels des intégrales.

Envisageons l'équation

$$(1) \quad y' + \varphi_1 y^2 + \varphi_2 y + \varphi_3 = 0,$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont des fonctions données de x , uniformes et sans points essentiels dans un intervalle donné de $x = a$ jusqu'à $x = b$. En y posant

$$(2) \quad y = \frac{1}{\varphi_1} \frac{u'}{u} + \frac{\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1'}{2 \varphi_1},$$

la fonction u est intégrale de l'équation

$$(3) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \varpi(x)u = 0,$$

où

$$\varpi(x) = \varphi_1 \varphi_3 - \frac{d}{dx} \left(\frac{\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1'}{2 \varphi_1} \right) - \left(\frac{\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1'}{2 \varphi_1} \right)^2.$$

En même temps, la dérivée logarithmique $\frac{u'}{u}$ est l'intégrale générale de

$$(4) \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{u'}{u} \right) + \left(\frac{u'}{u} \right)^2 + \varpi(x) = 0.$$

Posons

$$(5) \quad \chi(x) = \frac{1}{2}(\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1'),$$

$$(6) \quad \omega(x) = u' + \chi(x)u,$$

l'intégrale y sera

$$(7) \quad y = \frac{1}{\varphi_1(x)} \frac{\omega(x)}{u(x)}.$$

Marquons sur l'axe réel Ox les zéros réels de $\varphi_1(x)$ et les pôles réels de φ_1 , φ_2 , φ_3 . Dans tout intervalle (a, b) , ne contenant aucune de ces valeurs, la fonction u restera finie et l'intégrale y de (1) jouira des propriétés suivantes :

1° Supposons d'abord que, dans l'intervalle considéré (a, b) , la fonction $\varpi(x)$ soit constamment positive et la fonction $\chi(x)$ constamment décroissante. Alors, d'après la formule (4), la dérivée logarithmique $\frac{u'}{u}$ est constamment décroissante dans cet intervalle et il en est de même du rapport

$$\frac{\omega(x)}{u(x)} = \frac{u'}{u} + \chi(x).$$

Or, pour toute valeur de x , qui annule u , ce rapport passe du négatif au positif. D'autre part, pour toute valeur de x qui annule ω , on a $u(x) \neq 0$ [car autrement, d'après la formule (6), on aurait à la fois $u = 0$, $u' = 0$, ce qui est impossible en vertu d'une propriété connue de l'équation (3), la fonction $\varpi(x)$ restant holomorphe dans l'intervalle considéré], et comme le rapport $\frac{\omega}{u}$ dé-

croît, il passe du positif au négatif pour cette valeur de x ; puis, x continuant à croître, il décroît indéfiniment en prenant des valeurs négatives de plus en plus grandes, jusqu'à ce que u devienne nulle. Alors il devient infini et change de signe en passant de $-\infty$ à $+\infty$. Ensuite, x continuant à croître, ce rapport recommence à décroître, en prenant des valeurs positives de plus en plus petites, jusqu'à ce qu'il s'annule, etc.

On en conclut que *les zéros et les infinis de l'intégrale générale y de l'équation (1), compris dans l'intervalle (a, b) , se séparent mutuellement, de sorte que cette intégrale s'annule et devient infinie alternativement pour des valeurs croissantes de x .*

De plus, si $\varphi_1(x)$ est constamment positive entre a et b , l'intégrale oscille entre $+\infty$ et $-\infty$, en décroissant toujours et avec passage brusque de $-\infty$ à $+\infty$; au contraire, si $\varphi_1(x)$ est constamment négative, l'intégrale oscille de $+\infty$ à $-\infty$ en croissant constamment et avec passage brusque de $+\infty$ à $-\infty$.

2° Supposons que, dans l'intervalle (a, b) , la fonction $\varpi(x)$ ne soit pas constamment positive ou que $\chi(x)$ ne soit pas constamment décroissante. Alors le rapport $\frac{w}{u}$ peut tantôt croître, tantôt décroître. Désignons par ξ_1 et ξ_2 deux infinis consécutifs de l'intégrale y , c'est-à-dire deux zéros consécutifs de u , compris entre a et b , et soit ε une quantité positive très petite. La valeur de

$$\frac{w(\xi_1 - \varepsilon)}{u(\xi_1 + \varepsilon)}$$

sera très grande et positive; celle de

$$\frac{w(\xi_2 - \varepsilon)}{u(\xi_2 - \varepsilon)}$$

très grande et négative. Donc le rapport $\frac{w}{u}$ s'annule un nombre impair de fois entre ξ_1 et ξ_2 . On en conclut que *deux infinis consécutifs quelconques de l'intégrale y , compris dans l'intervalle (a, b) , comprennent au moins un, et en général un nombre impair de zéros de cette intégrale.*

Proposons-nous maintenant de déterminer le nombre de ces zéros ou de ces infinis compris dans un intervalle donné (a, b) .

Occupons-nous d'abord des infinis. Tout infini de y est soit un zéro de $\varphi_1(x)$, soit un pôle de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, soit un zéro de u . Toutes ces valeurs, sauf les zéros de u , sont fixes et connues à l'avance; les seuls infinis mobiles de y sont les zéros de u , et nous allons chercher le nombre de ces infinis mobiles dans l'intervalle donné.

A cet effet, commençons par rappeler quelques résultats connus, relatifs aux équations linéaires du second ordre, dus à Sturm, en les complétant sur plusieurs points et en les appliquant directement à l'équation (1) de Riccati.

Considérons les deux équations

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \pi(x)u = 0,$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \gamma(x)v = 0,$$

où π et γ sont deux fonctions holomorphes dans l'intervalle (a, b) . Alors :

1° Si, dans cet intervalle, on a constamment $\gamma(x) \geq \pi(x)$, deux zéros consécutifs de u comprennent au moins un zéro de v .

2° Si l'on a

$$\frac{v'(a)}{v(a)} \leq \frac{u'(a)}{u(a)}, \quad u(a)v(a) \geq 0,$$

et si dans l'intervalle (a, b) , on a constamment $\gamma(x) \leq \pi(x)$, la fonction v s'annulera au moins autant de fois que u entre les limites a et b , et si l'on considère par ordre de grandeur, à partir de $x = a$, les différentes valeurs de x qui annulent u et v , les valeurs de x qui annulent u seront respectivement plus grandes que celles de même rang qui annulent v .

Ceci étant, partageons l'intervalle donné en sous-intervalles, dans lesquels $\pi(x)$ garde un signe invariable, et envisageons d'abord un tel sous-intervalle (a', b') où $\pi(x)$ est constamment négative.

Soit $-M$ la plus grande valeur que $\pi(x)$ prend entre les limites (a', b') et envisageons l'équation

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - Mv = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$v = C_1 e^{i\sqrt{M}} + C_2 e^{-i\sqrt{M}}.$$

Soit A la valeur attribuée à y pour $x = a$; la valeur $\eta(a) = \frac{u'(a)}{u(a)}$ sera, d'après la formule (2),

$$\eta(a) = 2A \varphi_1(a) + \varphi_1'(a) - \varphi_1(a) \varphi_2(a),$$

et l'on peut évidemment choisir les constantes d'intégration C_1 et C_2 , de sorte que les conditions de Sturm soient remplies. On en conclut, d'après le théorème précédent, que u ne peut s'annuler plus d'une fois entre a' et b' . Par conséquent, y ne peut avoir plus d'un infini mobile dans cet intervalle.

Envisageons maintenant un sous-intervalle (a'', b'') dans lequel $\pi(x)$ est constamment positive. Dans cet intervalle, la fonction $\pi(x)$ peut s'annuler une ou plusieurs fois et avoir un ou plusieurs pôles; partageons-le :

1° En intervalles (z, z') dans lesquels la fonction $\pi(x)$ reste holomorphe;

2° En intervalles très petits (β, β') dans le voisinage d'un pôle de $\pi(x)$.

I. — INTERVALLES (z, z') .

Soient M et N la plus grande et la plus petite valeur que prend la fonction $\pi(x)$ dans un tel intervalle (en supposant $N \neq 0$), et considérons les deux équations

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d^2 v}{dx^2} + Mv = 0, \\ \frac{d^2 w}{dx^2} + Nw = 0, \end{cases}$$

dont les intégrales respectives sont

$$\begin{aligned} v &= C_1 \sin(x\sqrt{M} + C_2), \\ w &= C_3 \sin(x\sqrt{N} + C_4). \end{aligned}$$

Comme on peut toujours choisir les constantes $C_1, C_2, C_3,$

C_1 , de sorte qu'on ait à la fois

$$\frac{v'(a)}{v(a)} \leq \theta(a), \quad \frac{w'(a)}{w(a)} \leq \theta(a),$$

$$u(a)w(a) \geq 0, \quad u(a)v(a) \geq 0,$$

d'après le théorème de Sturm, $u(x)$ s'annulera dans l'intervalle (a, b) au moins autant de fois que w et au plus autant de fois que v .

Il s'ensuit que si l'on convient de représenter par $E(\xi)$ le nombre d'unités entières contenues dans ξ , le nombre des zéros de $u(x)$, et, par suite, *le nombre des infinis mobiles de l'intégrale y , compris dans l'intervalle (z, z') , sera*

$$\text{au moins égal à } E \left[\frac{(z' - z) \sqrt{N}}{\pi} \right]$$

$$\text{au plus égal à } E \left[\frac{(z' - z) \sqrt{M}}{\pi} \right] + 1.$$

Le nombre des infinis, compris dans un intervalle (z, z') fini, est donc toujours limité. On peut toujours les séparer, c'est-à-dire partager l'intervalle (z, z') en plusieurs autres tels que, dans aucun d'eux, y ne pût avoir plus d'un infini. Car si

$$E \left[\frac{(z' - z) \sqrt{M}}{\pi} \right] = n,$$

on fractionnera l'intervalle (z, z') en $n + 1$ autres intervalles (z_i, z_{i+1}) tels que chacun soit plus petit que $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$ et l'on est certain d'avoir ainsi les infinis de y séparés, chacun des tels sous-intervalles ne pouvant comprendre qu'un infini au plus.

Voici maintenant comment on peut quelquefois calculer ces infinis avec une approximation suffisante, lorsqu'on se donne la valeur $y = A_i$ pour une extrémité $x = z_i$ de l'intervalle cité (z_i, z_{i+1}) , qui ne comprend plus d'un tel infini.

Soient K_1 et K_2 deux nombres compris entre 0 et π et tels que

$$(9) \quad \begin{cases} \operatorname{tang} K_1 = -\frac{\sqrt{N}}{\theta(z_i)}, \\ \operatorname{tang} K_2 = -\frac{\sqrt{M}}{\theta(z_i)}, \end{cases}$$

$\theta(z_i)$ étant complètement déterminée par la formule

$$\theta(z_i) = 2\Lambda_i \varphi_1(z_i) - \varphi_1'(z_i) - \varphi_1(z_i) \varphi_2'(z_i),$$

M et N étant la plus grande et la plus petite valeur de $\varpi(x)$ dans l'intervalle (z_i, z_{i+1}) . Les deux fonctions

$$v = C \sin[(x - z_i) \sqrt{M - K_2}],$$

$$w = C' \sin[(x - z_i) \sqrt{N - K_1}],$$

où C et C' sont des constantes arbitraires, satisfont à deux équations (8). On peut évidemment choisir les constantes C et C', de sorte que les conditions

$$u(z_i) w(z_i) = 0, \quad u(z_i) v(z_i) \geq 0,$$

soient remplies, et l'on s'assure facilement qu'en vertu des inégalités (9), les conditions

$$\frac{v'(z_i)}{v(z_i)} \geq \theta(z_i), \quad \frac{w'(z_i)}{w(z_i)} = \theta(z_i)$$

sont aussi remplies. Toutes les quatre conditions du théorème de Sturm seront donc remplies.

Ceci étant, désignons par x_1, x_2 et ξ les plus petites valeurs respectives de x , immédiatement supérieures à z_i , qui annulent w, v et u . D'après le théorème de Sturm, on aura

$$x_2 < \xi < x_1.$$

Mais, comme l'on a

$$x_1 = z_i + \frac{K_1}{\sqrt{N}}, \quad x_2 = z_i + \frac{K_2}{\sqrt{M}},$$

on aura

$$z_i + \frac{K_2}{\sqrt{M}} < \xi < z_i + \frac{K_1}{\sqrt{N}}.$$

On connaîtra ainsi deux limites, entre lesquelles sera compris l'infini considéré ξ de y .

Si ces deux limites ne surpassent pas z_{i+1} , on sera certain qu'il existe entre elles un infini de y , qui est d'ailleurs le seul infini compris dans l'intervalle (z_i, z_{i+1}) .

Si la limite inférieure x_2 dépasse z_{i+1} , on sera certain que y ne devient pas infini dans l'intervalle (z_i, z_{i+1}) .

Le seul cas où l'on ne peut rien décider est celui où z_{i+1} est compris entre x_1 et x_2 . Tout ce qu'on saura, dans ce cas, c'est que y ne peut devenir infinie plus d'une fois dans l'intervalle (z_i, z_{i+1}) .

La détermination des limites x_1 et x_2 dépend de la détermination des limites suffisamment rapprochées, entre lesquelles peuvent varier les deux nombres K_1 et K_2 , tout en satisfaisant aux conditions (9). Or, étant donnée la valeur $y = A_i$ pour $x = z_i$, la valeur $\theta(z_i)$ sera donnée par la formule

$$\theta(z_i) = 2A_i\varphi_1(z_i) + \varphi_1(z_i) - \varphi_1(z_i)\varphi_2(z_i);$$

M et N sont aussi connus, et, par suite, les limites entre lesquelles doivent varier K_1 et K_2 seront connues. On choisira, dans ces limites, deux valeurs de K_1 et K_2 telles que la différence

$$x_2 - x_1 = \frac{K_2}{\sqrt{M}} - \frac{K_1}{\sqrt{N}}$$

soit la plus petite possible.

On obtiendra de nouvelles limites plus rapprochées de ξ en appliquant ces mêmes calculs à l'intervalle (x_2, x_1) qu'on vient de déterminer. Mais, pour cela, il faudra calculer la valeur exacte ou suffisamment approchée de $\theta(x_2)$, ce qu'on peut faire de la manière suivante. La fonction

$$(10) \quad \theta(x) = 2\varphi_1(x)y + \varphi_1(x) - \varphi_1(x)\varphi_2(x)$$

reste holomorphe pour toute valeur de x comprise entre les limites z_i et $z_i + \frac{K}{\sqrt{M}}$, puisque, entre ces limites, y n'a pas d'infinis. Par conséquent, on aura

$$(11) \quad \theta(x_2) = \theta\left(z_i + \frac{K_2}{\sqrt{M}}\right) = \theta(z_i) + \frac{\theta'(z_i)}{1} \frac{K_2}{\sqrt{M}} + \frac{\theta''(z_i)}{1 \cdot 2} \left(\frac{K_2}{\sqrt{M}}\right)^2 + \dots$$

où il faut remplacer y par A_i et les dérivées $\theta'(z_i)$, $\theta''(z_i)$, ... par leurs valeurs respectives, qu'on trouve en différenciant la formule (10) et en y remplaçant les dérivées successives de y par leurs valeurs tirées de l'équation de Riccati donnée. La convergence de la série (11) est assurée à l'avance.

En continuant ainsi de proche en proche, on pourra rapprocher

les limites qui comprennent ξ et calculer celui-ci avec une approximation suffisante.

Envisageons maintenant l'intervalle entier (z, z') . Supposons que, x variant de $x = z$ jusqu'à $x = z'$, la fonction $\varpi(x)$ varie constamment dans un même sens (en croissant ou en décroissant) et étudions la variation de la distance de deux infinis consécutifs de γ , que x rencontrera pendant cette variation.

En prenant comme limite inférieure z de l'intervalle (z, z') un infini $x = \xi$ de γ , on peut déterminer les constantes d'intégration dans les formules

$$v = C_1 \sin(x\sqrt{M} + C_2),$$

$$w = C_3 \sin(x\sqrt{N} + C_4),$$

de manière qu'on ait à la fois

$$v(\xi) = 0, \quad w(\xi) = 0;$$

on aura alors

$$v = C_1 \sin[(x - \xi)\sqrt{M}],$$

$$w = C_3 \sin[(x - \xi)\sqrt{N}].$$

D'après le théorème de Sturm, la valeur du zéro ξ' de $u(x)$ qui suit immédiatement ξ doit être plus grande que la première valeur au delà de ξ qui annule v et plus petite que la première valeur de x au delà de ξ qui annule w , d'où résulte

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} < \xi' - \xi < \frac{\pi}{\sqrt{N}}$$

ou

$$\xi' - \xi = \frac{\pi}{\sqrt{\varpi(\gamma)}},$$

γ désignant une certaine valeur comprise entre ξ et ξ' . On aura de même pour le zéro ξ'' de $u(x)$, immédiatement supérieur à ξ' ,

$$\xi'' - \xi' = \frac{\pi}{\sqrt{\varpi(\gamma')}},$$

γ' désignant une quantité comprise entre ξ' et ξ'' , etc.

Distinguons maintenant les deux cas suivants :

Premier cas. — Supposons que la fonction $\varpi(x)$ aille constamment en décroissant dans l'intervalle considéré (z, z') . On

aura alors dans cet intervalle

$$\varpi(\gamma) > \varpi(\gamma') > \varpi(\gamma'') > \dots$$

et, par suite,

$$\xi' - \xi < \xi'' - \xi' < \xi''' - \xi'' < \dots$$

Ceci montre que la différence de deux infinis consécutifs de γ augmente de plus en plus lorsqu'on va de α jusqu'à α' , mais elle ne peut pas dépasser la quantité $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$.

Si, x croissant de α jusqu'à l'infini, la fonction $\varpi(x)$ reste constamment positive et tend asymptotiquement vers une limite ϱ , l'intégrale γ aura, dans l'intervalle (α, ∞) , une infinité d'infinis et la différence de deux infinis consécutifs tend asymptotiquement vers la limite $\frac{\pi}{\sqrt{\varrho}}$. Lorsqu'on aura calculé quelques-uns des plus petits infinis ξ_i de γ , la formule

$$\xi_n - \xi_{n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{\varrho}}$$

donne les suivants avec assez d'approximation.

Si la limite ϱ est égale à zéro, cette différence augmente indéfiniment. Dans ce cas, il peut encore exister dans l'intervalle (α, ∞) une infinité d'infinis de γ , mais la comparaison avec les fonctions précédentes ν et ω ne peut plus décider s'il en est ainsi ou non. Pour le décider, on peut procéder comme ceci.

D'abord, si $x = \infty$ est un zéro simple de $\varpi(x)$, l'intégrale γ deviendra infinie une infinité de fois dans l'intervalle (α, ∞) , puisque la limite inférieure du nombre de ces infinis est égale à

$$\lim E \left[\frac{(x - \alpha) \sqrt{\varpi(x)}}{\pi} \right] = \infty, \quad \text{pour } x = \infty.$$

Supposons donc que $x = \infty$ soit un zéro multiple de $\varpi(x)$. Alors l'expression $x \sqrt{\varpi(x)}$ tend, pour $x = \infty$, vers une limite finie et déterminée λ , pouvant d'ailleurs être égale à zéro. Distinguons les trois cas suivants.

1° $\lambda < \frac{1}{2}$. — On peut dans ce cas trouver un nombre h , suffisamment grand, mais fini, et tel que pour toute valeur de x plus

grande que h , on ait

$$x \sqrt{\varpi(x)} < \frac{1}{2}$$

ou

$$\varpi(x) < \frac{1}{4x^2}.$$

Si l'on envisage alors l'équation linéaire

$$(12) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{4x^2} v = 0,$$

d'après le théorème de Sturm, lorsque x varie de h jusqu'à ∞ , une intégrale v quelconque de (12) s'annulera au moins autant de fois que l'une quelconque des intégrales u de l'équation

$$(13) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \varpi(x) u = 0.$$

Et comme l'intégrale particulière $v = \sqrt{x}$ de (12) ne s'annule point pour de grandes valeurs de x , il en est de même de u . *Le nombre des infinis de y dans l'intervalle (x, ∞) est alors fini.*

Ceci comprend, comme cas particulier, le cas où $\lambda = 0$, comme il en sera toujours lorsque le degré de multiplicité du zéro $x = \infty$ de $\varpi(x)$ surpasse 2.

2° $\lambda > \frac{1}{2}$. — Alors à tout intervalle, à partir d'une valeur finie $x = h$, on peut faire correspondre une quantité ε positive, suffisamment petite et telle qu'on ait dans cet intervalle

$$x \sqrt{\varpi(x)} > \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

ou

$$\varpi(x) > \frac{(\frac{1}{2} + \varepsilon)^2}{x^2}.$$

Si l'on envisage alors l'équation

$$(14) \quad \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{(\frac{1}{2} + \varepsilon)^2}{x^2} V = 0,$$

u s'annulera dans un intervalle quelconque entre h et ∞ , au moins autant de fois qu'une intégrale quelconque V de (13). Or, l'équation (14) admet comme intégrale particulière la fonction

$$V = \sqrt{x} \cos[\sqrt{\varepsilon + \varepsilon^2} \log x].$$

qui s'annule pour une infinité de valeurs réelles de x , données par la formule

$$\alpha_n = e^{2n+1} \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon + \varepsilon^2}},$$

grandissant au delà de toute limite, et dont le nombre dans l'intervalle (h, ∞) est infini, quoique la différence

$$\alpha_n - \alpha_{n-1} = e^{2n} \rho (e^\rho - e^{-\rho}) \quad \left(\rho = \frac{\pi}{2\sqrt{\varepsilon + \varepsilon^2}} \right).$$

augmente indéfiniment avec n . Par suite, la fonction $u(x)$ s'annulera un nombre infini de fois dans cet intervalle. *L'intégrale y aura donc une infinité d'infinis dans l'intervalle (α, ∞) .*

3° $\lambda = \frac{1}{2}$. Trois cas peuvent se présenter.

Si, pour les valeurs de x croissantes à partir d'une valeur h suffisamment grande, on a constamment

$$\varpi(x) < \frac{1}{4x^2},$$

on se trouve dans le cas 1°.

Si à tout intervalle (h', h'') , compris dans l'intervalle (h, ∞) , on peut faire correspondre un nombre positif ε tel que x variant entre les limites h' et h'' , on ait constamment

$$\varpi(x) > \frac{(\frac{1}{2} + \varepsilon)^2}{x^2},$$

on se trouve dans le cas 2°.

Si ni l'une ni l'autre de ces circonstances ne se présente, on ne peut rien décider.

Deuxième cas. — Supposons que la fonction $\varpi(x)$ aille constamment en croissant dans l'intervalle (α, α') . On aura alors

$$\varpi(\gamma) < \varpi(\gamma') < \varpi(\gamma'') < \dots$$

et, par suite,

$$\xi' - \xi > \xi'' - \xi' > \xi''' - \xi'' > \dots$$

La différence de deux infinis consécutifs de y diminue donc de plus en plus lorsqu'on va de α jusqu'à α' , mais elle ne peut pas devenir plus petite que $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$.

Si, x croissant de α jusqu'à l'infini, la fonction $\varpi(x)$ reste constamment positive, et tend asymptotiquement vers une limite φ , les différences de deux infinis consécutifs de y , diminuent progressivement, et tendent vers la limite $\frac{\pi}{\sqrt{\varphi}}$ et, par suite, y devient infini pour un nombre infini de valeurs de x compris entre α et ∞ . Si, en particulier, la limite φ est infinie, l'intégrale y devient infinie pour un nombre infini de valeurs de x , croissant indéfiniment et telles que la différence de deux de ces valeurs consécutives finit par devenir plus petite que toute quantité donnée.

II. — INTERVALLES (β, β') .

Envisageons maintenant un intervalle très petit (β, β') au voisinage d'un pôle de $\varpi(x)$. D'abord si x , tendant vers le pôle $x = c$ de $\varpi(x)$ par des valeurs croissantes ou décroissantes, à partir d'une valeur $x = a$, la fonction $\varpi(x)$ reste constamment négative dans l'intervalle (a, c) ; il suit de ce qui précède que y ne peut avoir, dans cet intervalle, plus d'un infini. Supposons donc que, dans l'intervalle (a, c) , la fonction $\varpi(x)$ reste constamment positive. En prenant comme nouvelle variable indépendante z , définie par la relation

$$x = \pm \frac{1}{z} + c$$

[le signe $\pm$ devant $\frac{1}{z}$ est mis pour qu'à de grandes valeurs positives de z puissent correspondre les valeurs de x très peu différentes de c et se trouvant de l'un ou de l'autre côté de c , suivant que x tend vers c par des valeurs croissantes ou décroissantes], l'équation (13) se transforme en

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \Phi(z)u = 0,$$

avec

$$\Phi(z) = \varpi\left(\pm \frac{1}{z} + c\right) \frac{1}{z^4}.$$

Distinguons les trois cas suivants :

1° La valeur $x = c$ est un pôle de $\varpi(x)$ d'un ordre supé-

rieur à 4. Alors pour $x = c$, c'est-à-dire pour $z = \infty$, on aura

$$\lim \Phi(z) = \lim [(x - c)^4 \varpi(x)] = \infty,$$

et, par conséquent, d'après une remarque précédente, l'intégrale y , considérée comme fonction de z , deviendra infinie pour une infinité de valeurs de z très grandes, et dont la différence finit par devenir plus petite que toute quantité donnée. Il s'ensuit que y , considérée comme fonction de x , aura dans l'intervalle (a, c) une infinité d'infinis, s'approchant indéfiniment de c , et dont la différence tend vers zéro.

2° La valeur $x = c$ est un pôle d'un ordre égal à 4 pour $\varpi(x)$. La limite de $\Phi(z)$ pour $x = c$ est alors un nombre fini λ . En considérant u comme fonction de z , la limite inférieure de ses zéros dans l'intervalle $\left(\frac{1}{a-c}, z\right)$ est

$$E \left[\frac{\left(\pm z - \frac{1}{a-c} \right) \sqrt{\Phi(z)}}{\pi} \right],$$

et cette limite augmente indéfiniment lorsque z tend vers ∞ . Par conséquent y , considérée comme fonction de x , deviendra infinie pour une infinité de valeurs de x comprises dans l'intervalle (a, c) et s'approchant indéfiniment de c .

3° La valeur $x = c$ est un pôle de $\varpi(x)$ d'un ordre inférieur à 4. Alors on a

$$\lim \Phi(z) = 0,$$

pour $z = \infty$, et pour décider si le nombre des infinis de y , dans le voisinage de $z = c$, est limité ou non, il faut appliquer les théorèmes précédents, ce qui conduira aux résultats suivants : Désignons par λ la limite de $(x - c)\sqrt{\varpi(x)}$ pour $x = c$. Alors l'expression $z\sqrt{\Phi(z)}$ aura, pour $z = \infty$, la même limite λ et

a. Si $\lambda < \frac{1}{2}$, l'intégrale y n'a qu'un nombre limité d'infinis dans l'intervalle (a, c) ;

b. Si $\lambda > \frac{1}{2}$, y devient infinie pour une infinité de valeurs de x , voisines de c et tendant vers c ;

c. Si $\lambda = \frac{1}{2}$, on aura le cas (a) ou (b) suivant que, x variant

de a jusqu'à c , on ait dans le voisinage de $x = c$ constamment

$$(x - c)\sqrt{\varpi(x)} < \frac{1}{2}$$

ou

$$(x - c)\sqrt{\varpi(x)} > \frac{1}{2}.$$

On peut ainsi étudier les infinis de l'intégrale y dans tout intervalle dans lequel les coefficients $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, figurant dans l'équation de Riccati donnée, sont fonctions méromorphes de x .

Dans ce qui précède, nous nous sommes occupé des infinis de l'intégrale y . Mais tout ce qui précède s'applique aussi à l'étude des zéros de y , d'après la remarque suivante :

Si dans l'équation donnée

$$(15) \quad y' + \varphi_1(x)y^2 + \varphi_2(x)y + \varphi_3(x) = 0,$$

on fait $y = \frac{1}{z}$, on aura

$$(16) \quad z' - \varphi_3(x)z^2 - \varphi_2(x)z - \varphi_1(x) = 0.$$

Tout zéro de y est un infini de z et réciproquement. En posant

$$z = -\frac{1}{\varphi_3} \frac{v'}{v} - \frac{\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1'}{2\varphi_3},$$

v est l'intégrale de l'équation

$$(17) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + \chi(x)v = 0,$$

où

$$\chi(x) = \varphi_2\varphi_3 + \frac{d}{dx} \left(\frac{\varphi_2\varphi_3 + \varphi_1'}{2\varphi_3} \right) - \left(\frac{\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1'}{2\varphi_3} \right)^2.$$

Tout ce qui a été dit pour les infinis de y s'applique aussi bien aux zéros par la considération de l'équation (17), de sorte qu'on aura, par exemple, une limite supérieure et une limite inférieure du nombre des zéros compris dans un intervalle donné; on pourra assigner des limites entre lesquelles il n'y a pas plus d'un zéro, calculer ces zéros par approximation, étudier leur nombre et distribution dans le voisinage d'un point singulier des coefficients de l'équation, etc.

On peut aussi, par ce qui précède, étudier les variations des zéros et des infinis de l'intégrale $\mathcal{Y}$, lorsque les coefficients dans l'équation contiennent un ou plusieurs paramètres variables, et lorsque ces paramètres varient.

Enfin on peut toujours étudier la façon dont l'intégrale se comporte pour $x = \infty$. A cet effet, posons

$$\mathcal{Y} = \frac{U}{\varphi_1(x)};$$

l'équation (15) se transforme en

$$(18) \quad \frac{dU}{dx} + U^2 + F_1(x)U + F_2(x) = 0,$$

où

$$F_1(x) = \varphi_2(x) - \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)},$$

$$F_2(x) = \varphi_1(x)\varphi_3(x).$$

L'équation (18) a été l'objet d'une étude approfondie de M. Poincaré au point de vue des limites vers lesquelles tend l'intégrale U , lorsque x tend vers ∞ d'une certaine manière, par exemple par des valeurs positives croissantes. Ainsi, si les fonctions $F_1(x)$ et $F_2(x)$ tendent vers des limites finies et déterminées pour $x = \infty$, de sorte qu'on ait

$$\lim F_1(x) = a_1,$$

$$\lim F_2(x) = a_2,$$

on aura à distinguer les deux cas suivants :

1° Si $a_1^2 - 4a_2 > 0$, l'intégrale U tend vers une limite finie et déterminée qui est, en général, égale à la plus petite des deux valeurs

$$-\frac{1}{2}(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}),$$

$$-\frac{1}{2}(a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}),$$

et ne pouvant qu'exceptionnellement être égale à la plus grande de ces valeurs.

2° Si $a_1^2 - 4a_2 = 0$, l'intégrale U tend vers la limite $-\frac{a_1}{2}$.

3° Si $a_1^2 - 4a_2 < 0$, U ne tend vers aucune limite déterminée : toute intégrale oscille alors une infinité de fois entre $+\infty$ et $-\infty$.

avec passage brusque de $-\infty$ à $+\infty$, à la façon de la fonction $U = -\operatorname{tang} x$.

Ce dernier fait se déduit, d'ailleurs, facilement de ce qui précède. Car si l'on pose

$$U = \frac{1}{V} \frac{dV}{dx} + \frac{1}{2} F_1(x),$$

l'équation (18) se transforme en

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \Psi(x) V = 0,$$

où

$$\Psi(x) = F_2(x) - \frac{1}{2} F_1'(x) - \frac{1}{3} F_1^2(x).$$

A partir d'une valeur $x = h$, positive et suffisamment grande, la fonction $\Psi(x)$ sera finie et aura un signe constant qui sera celui de la quantité $a_2 - \frac{a_1^2}{4}$. Comme $a_1^2 - 4a_2 < 0$, on peut toujours choisir la valeur $x = h$ de manière que, dans l'intervalle de $x = h$ jusqu'à $x = \infty$, la plus petite valeur de $\Psi(x)$ soit différente de zéro et positive. Si l'on désigne par N cette valeur, d'après ce qui précède, la fonction U deviendra infinie pour un nombre infini de valeurs de x compris dans l'intervalle (h, ∞) et dont la différence va constamment en croissant ou en décroissant suivant que la fonction $\Psi(x)$ est décroissante ou croissante pour de grandes valeurs de x . De plus, la différence de deux infinis consécutifs, dans le premier cas, augmente de plus en plus, mais ne peut pas dépasser la quantité $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$; dans le second cas, cette différence diminue de plus en plus, mais ne peut pas devenir plus petite que la quantité $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$. En même temps, puisque la dérivée logarithmique $\frac{1}{V} \frac{dV}{dx}$ pour $x = x_1 - \varepsilon$ (x_1 désignant l'une quelconque des valeurs de x qui annulent V , et ε un nombre positif infiniment petit) a la valeur $-\infty$, et pour $x = x_1 + \varepsilon$ la valeur $+\infty$, la fonction U oscille entre $+\infty$ et $-\infty$, avec passage brusque de $-\infty$ à $+\infty$.

SUR LA REPRÉSENTATION NOMOGRAPHIQUE DES ÉQUATIONS
DU SECOND DEGRÉ À TROIS VARIABLES;

Par M. MAURICE D'OCAGNE.

Soit l'équation du second degré à trois variables la plus générale

$$(1) \quad \begin{cases} a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2b_1 x_2 x_3 + 2b_2 x_3 x_1 \\ + 2b_3 x_1 x_2 + 2c_1 x_1 + 2c_2 x_2 + 2c_3 x_3 + d = 0. \end{cases}$$

Je vais démontrer que la condition NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE pour que cette équation soit représentable par un abaque formé d'un système de cercles et de deux systèmes de droites parallèles est que l'équation (1), où les variables x_1, x_2, x_3 sont prises pour des coordonnées courantes, définisse une surface coupée par l'un au moins des plans de coordonnées suivant une ellipse, d'ailleurs réelle ou imaginaire.

Supposons que nous puissions mettre l'équation (1) sous la forme

$$(II) \quad \begin{cases} (k_3 x_2 + k_2 x_3)^2 + (h_3 x_2 + h_2 x_3)^2 + 2(h_1 x_1 + k_1)(k_3 x_2 + k_2 x_3) \\ + 2(h'_1 x_1 + k'_1)(h_3 x_2 + h_2 x_3) + \rho(a_1 x_1^2 + 2c_1 x_1 + d) = 0, \end{cases}$$

les h et les k étant des coefficients à déterminer, ρ un paramètre dont nous disposerons arbitrairement.

Nous poserons alors

$$(1) \quad x = k_3 x_2 + k_2 x_3, \quad y = h_3 x_2 + h_2 x_3, \quad (2)$$

et nous n'aurons qu'à éliminer d'abord x_2 et x_3 entre (II), (1) et (2), puis, respectivement, x_2 et x_3 entre (1) et (2) pour obtenir les équations des trois systèmes d'isoplèthes suivants pour l'équation (II), c'est-à-dire pour (I),

$$(x_1) \quad x^2 + y^2 + 2(h_1 x_1 + k_1)x + 2(h'_1 x_1 + k'_1)y + \rho(a_1 x_1^2 + 2c_1 x_1 + d) = 0,$$

$$(x_2) \quad h_2 x - k_2 y = (h_2 k_3 - h_3 k_2) x_2,$$

$$(x_3) \quad h_3 x - k_3 y = (h_3 k_2 - h_2 k_3) x_3.$$

Le système (α_1) est, on le voit, composé de cercles ayant leurs centres en ligne droite et dont l'enveloppe est une conique. Les systèmes (α_2) et (α_3) sont composés de droites de direction constante dans chacun d'eux.

L'équation (I) sera donc représentable par un abaque ainsi constitué chaque fois qu'on pourra déterminer, pour les coefficients h et k , des valeurs *réelles* rendant (II) identique à (I).

L'identification de ces deux équations donne

$$(3) \quad k_3^2 + h_3^2 = \varphi a_2,$$

$$(4) \quad k_2^2 + h_2^2 = \varphi a_3,$$

$$(5) \quad k_2 k_3 + h_2 h_3 = \varphi b_1,$$

$$(6) \quad h_1 k_2 + h'_1 h_2 = \varphi b_2,$$

$$(7) \quad h_1 k_3 + h'_1 h_3 = \varphi b_3,$$

$$(8) \quad k_1 k_3 + k'_1 h_3 = \varphi c_2,$$

$$(9) \quad k_1 k_2 + k'_1 h_2 = \varphi c_3.$$

Les trois premières de ces équations ne contiennent que les quatre inconnues h_2, k_2, h_3, k_3 . Nous allons voir si nous pouvons disposer de l'une de ces inconnues, de façon que ces équations nous donnent des valeurs réelles pour les trois autres. Une fois que nous aurons obtenu ces quatre coefficients, les équations (6) et (7) nous donneront linéairement h_1 et h'_1 , et les équations (8) et (9), k_1 et k'_1 .

Tout revient donc à résoudre le système des équations (3), (4) et (5), en se donnant arbitrairement l'une des inconnues, k_3 par exemple.

L'équation (3) donne d'abord

$$h_3 = \sqrt{\varphi a_2 - k_3^2}.$$

Cela exige que

$$\varphi a_2 - k_3^2 > 0,$$

inégalité à laquelle on peut toujours satisfaire puisque la valeur de φ est choisie arbitrairement. On voit que φ devra nécessairement avoir le même signe que a_2 .

Éliminant maintenant h_2 entre (4) et (5), on obtient, en tenant

compte de (3), l'équation

$$a_2 k_2^2 - 2 b_1 k_3 k_2 + \varphi (b_1^2 - a_2 a_3) + a_3 k_3^2 = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que cette équation ait des racines réelles est

$$b_1^2 k_3^2 - a_2 [\varphi (b_1^2 - a_2 a_3) + a_3 k_3^2] > 0$$

ou

$$(k_3^2 - a_2 \varphi) (b_1^2 - a_2 a_3) > 0.$$

Or, nous venons de voir que le premier de ces deux facteurs doit nécessairement être négatif. Il faut donc que le second le soit aussi, c'est-à-dire que

$$b_1^2 - a_2 a_3 < 0,$$

ce qui exprime que la surface définie par l'équation (1) est coupée par le plan $z_1 = 0$ suivant une courbe du genre elliptique.

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que le problème ait une solution réelle. Mais, si elle est remplie, on voit que l'on peut donner à k_3 une valeur quelconque. Nous prendrons

$$k_3 = 0.$$

Dès lors les équations (3) à (9) donnent successivement

$$h_3 = \sqrt{\frac{\varphi}{a_2} a_2},$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{\varphi}{a_2} b_1},$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{\varphi}{a_2} (a_2 a_3 - b_1^2)},$$

$$h'_1 = \sqrt{\frac{\varphi}{a_2} b_3},$$

$$h_1 = \sqrt{\frac{\varphi}{a_2} \frac{a_2 b_2 - b_1 b_3}{\sqrt{a_2 a_3 - b_1^2}}},$$

$$k'_1 = \sqrt{\frac{\varphi}{a_2} c_3},$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{\varphi}{a_2} \frac{a_2 c_3 - b_1 c_2}{\sqrt{a_2 a_3 - b_1^2}}}.$$

Portant les valeurs de ces coefficients dans les équations des isoplèthes (x_1) , (x_2) et (x_3) , on obtient

$$(x_1) \left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 + 2\sqrt{\frac{\rho}{a_2(a_2a_3 - b_1^2)}} [(a_2b_2 - b_1b_3)x_1 + a_2c_3 - b_1c_2]x \\ + 2\sqrt{\frac{\rho}{a_2}} (b_3x_1 + c_2)y + \rho(a_1x_1^2 + 2c_1x_1 + d) = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(x_2) \quad b_1x - \sqrt{a_2a_3 - b_1^2}y = -\sqrt{\rho a_2(a_2a_3 - b_1^2)}x_2,$$

$$(x_3) \quad x = \sqrt{\frac{\rho(a_2a_3 - b_1^2)}{a_2}}x_3.$$

A titre de vérification, prenons l'équation

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Nous avons ici

$$a_1 = \frac{1}{a^2}, \quad a_2 = \frac{1}{b^2}, \quad a_3 = \frac{1}{c^2},$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = c_1 = c_2 = c_3 = 0, \quad d = -1.$$

Prenons, en outre, $\rho = a^2$.

Les équations des isoplèthes deviennent alors

$$(x_1) \quad x^2 + y^2 + x_1^2 - a^2 = 0,$$

$$(x_2) \quad y = \frac{a}{b}x_2,$$

$$(x_3) \quad x = \frac{a}{c}x_3.$$

La vérification est immédiate.

NOTE SUR LES GROUPES DE SUBSTITUTIONS;

Par M. ED. MAILLET.

Nous nous proposons de donner ici :

1° Quelques indications sur les sous-groupes transitifs des isomorphes holoédriques des groupes symétriques ou alternés;

2° Une relation entre le degré, la classe et l'ordre de certains groupes primitifs;

3° Quelques propriétés des groupes transitifs de classe ef , e et f étant premiers et impairs.

I.

Soit D un groupe de substitutions, dérivé de deux de ses sous-groupes A et B , tous deux $< D$: supposons A et B échangables (¹). Si d , a et a' , b et b' désignent des substitutions de D , A , B respectivement, on aura, quel que soit d , pour des valeurs de a , a' , b , b' convenablement choisies : $d = ab = b'a'$. On peut donc écrire $D = A \times B = B \times A$, et dire que D est le produit de A par B ; D sera dit décomposable.

Si A ne contient aucun sous-groupe permutable aux substitutions de D (autrement dit aucun sous-groupe invariant de D), on sait (²) que D possède un isomorphe holoédrique transitif D' ; de degré $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$, où $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sont les ordres de D , A , B , et C celui du groupe E des substitutions communes à A et B , le groupe A' , qui correspond à A dans D' , étant formé des substitutions de D' laissant une même lettre de D' immobile: le groupe B' , correspondant à B , est transitif, puisqu'il est de degré $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$.

Réciproquement, si un isomorphe holoédrique transitif D' de D contient un sous-groupe transitif B' (de même degré que D' bien entendu), avec $B' < D'$, et si A' est le sous-groupe des substi-

(¹) SERRET, *Algèbre supérieure*, t. II, p. 283.

(²) W. DYCK, *Math. Annalen*, t. XXII, et notre Thèse de Doctorat, p. 12.

tutions de D' qui laissent une même lettre de D' immobile, on aura $D' = A' \times B'$, ce qui entraîne $D = A \times B$, A et B étant les sous-groupes de D correspondant à A' et B' . On peut donc dire :

Le problème de la recherche des sous-groupes transitifs des isomorphes holoédriques et transitifs d'un groupe donné, est compris dans celui de la recherche des décompositions de ce groupe en un produit de deux sous-groupes. Il lui est équivalent quand le groupe donné est simple.

Quand D est un groupe symétrique ou alterné de n éléments ($n > 4$), les deux problèmes seront équivalents à condition d'exclure le cas où A ou B serait le groupe alterné de n éléments, lorsque D est symétrique; c'est ce que nous supposerons dans la suite.

Ceci posé, considérons les isomorphes holoédriques et transitifs des groupes symétriques ou alternés de n éléments ($n > 4$), et conservons les notations que nous avons adoptées dans le *Journal de Mathématiques* ⁽¹⁾.

S désignant le groupe symétrique ou alterné de n éléments, G un isomorphe holoédrique et transitif de S , nous avons montré que G ne peut contenir de substitution circulaire pour $n > 6$, si S est symétrique, et pour $n > 8$ si S est alterné. Une démonstration à peu près identique suffira pour établir cette propriété :

THÉORÈME. — *Un isomorphe holoédrique et transitif G d'un groupe symétrique ou alterné S de n éléments ne peut contenir aucun groupe régulier ⁽²⁾ formé de substitutions échangeables, et de degré égal ou inférieur à celui de G , sauf pour $n \leq 6$ si S est symétrique, ou pour $n \leq 8$ si S est alterné.*

On s'appuie encore sur ce qu'un sous-groupe de S formé de substitutions échangeables est d'ordre $\leq e^{\frac{n}{e}}$, et sur ce lemme :

LEMME. — *Un groupe transitif ne peut renfermer de groupe régulier d'ordre h , formé de substitutions échangeables que*

⁽¹⁾ P. 5 à 34; 1895.

⁽²⁾ C'est-à-dire transitif et d'ordre égal à son degré.

s'il est primitif ou composé avec un sous-groupe d'ordre non premier à h .

Si $S = A \times B$ est une décomposition de S , G l'isomorphe holoédrique de S issu de A , c'est-à-dire où A' correspondant à A est formé de l'ensemble des substitutions de G laissant une même lettre de G immobile, le sous-groupe B' de G correspondant à B est transitif, et réciproquement.

Si, en particulier, G est primitif et appartient à la première ou à la troisième catégorie, on sait que A est transitif entre les n éléments de S . On peut prendre pour B évidemment un groupe symétrique ou alterné de $n - 1$ éléments, suivant que S est symétrique ou alterné.

De même, si A est k fois transitif, avec $k > 1$, on peut prendre pour B un groupe symétrique ou alterné respectivement de $n - k'$ éléments, avec $k' \leq k$; si de plus G est primitif, il appartiendra à la troisième catégorie, puisque A est primitif. On aura ainsi en particulier :

THÉORÈME. — *Dans les isomorphes holoédriques primitifs G des groupes symétriques (alternés) S de n éléments :*

1° *Les sous-groupes correspondant aux sous-groupes de S symétriques (alternés) entre $n - 1$ éléments sont transitifs, quand G est de la première catégorie ;*

2° *Les sous-groupes correspondant aux sous-groupes de S symétriques (alternés) entre $n - k'$ éléments sont transitifs, quand G est de la troisième catégorie et est issu d'un sous-groupe T de S , k fois transitif entre les n éléments de S , avec $k \geq k' \geq 1$.*

A peine est-il besoin de faire remarquer qu'un sous-groupe de S contenant un sous-groupe symétrique (alterné) entre $n - k'$ éléments, donnera lieu à une remarque analogue, quand G est de la troisième catégorie.

Si l'on prend pour A un groupe intransitif, on voit encore :

THÉORÈME. — *Dans un isomorphe holoédrique et primitif G de la deuxième catégorie d'un groupe symétrique ou alterné S , formé par les substitutions opérées par S entre les combi-*

naisons α à α des n lettres de S ($1 < \alpha < \frac{n}{2}$), à tout sous-groupe de S k fois transitif entre les n lettres, correspondra dans G un sous-groupe transitif ⁽¹⁾ dès que $\alpha \leq k$.

G étant un isomorphe holoédrique et primitif quelconque de S contenant un sous-groupe transitif B' correspondant à un sous-groupe B de S , ne peut-on assigner certaines conditions auxquelles doit satisfaire B ?

D'abord, si A' est le sous-groupe des substitutions de G laissant une même lettre immobile. A le sous-groupe correspondant de S , on a $G = A' \times B'$, $S = A \times B$.

Mais l'on peut préciser davantage pour les deux premières catégories.

THÉORÈME. — *Quand G est un isomorphe primitif et holoédrique de la première catégorie du groupe symétrique ou alterné S de n éléments, tout sous-groupe transitif B' de G correspond à un sous-groupe B de S transitif entre n ou $n - 1$ éléments.*

En effet, G est formé de l'ensemble des substitutions opérées par S , entre les hypersystèmes constitués chacun par $\frac{n}{l}$ systèmes de l lettres de S , et $2 \leq l \leq \frac{n}{2}$. Si B est intransitif entre les n lettres de S , il permute exclusivement entre elles λ lettres, avec $\lambda \leq \frac{n}{2}$.

Dès lors, B permute exclusivement entre eux les hypersystèmes dont les systèmes ont respectivement $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ lettres communes avec ces λ lettres, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots$ étant égal à λ . Donc B' , qui est précisément le groupe des substitutions opérées par B entre tous les hypersystèmes, ne pourra être transitif que si l'on n'a qu'une seule combinaison de nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, tous $\leq l$, et dont la somme soit égale à λ . Or on aura toujours au moins deux combinaisons dès que $\lambda \geq 2$, puisqu'on peut toujours prendre, par exemple, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < l$, et considérer les deux combinaisons $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ et $\lambda_1 - 1, \lambda_2 + 1, \dots$, où tous les nombres, sauf les deux

⁽¹⁾ Parmi ces sous-groupes, on trouve même une série étendue de groupes primitifs; nous y reviendrons.

premiers, coïncident. On pourra d'ailleurs toujours prendre $\lambda \geq 2$ quand A n'est pas transitif entre n ou $n - 1$ éléments.

C. Q. F. D.

THÉOREME. — *Quand G est un isomorphe primitif et holoédrique de la deuxième catégorie du groupe symétrique ou alterné S entre n éléments, tout sous-groupe transitif B' de G correspond à un sous-groupe B de S transitif entre n éléments.*

En effet, G est formé de l'ensemble des substitutions opérées par S entre les combinaisons des n lettres de S x à x , et $2 \leq x < \frac{n}{2}$. Si B n'est pas transitif, il permute exclusivement entre elles λ lettres, avec $0 < \lambda \leq \frac{n}{2}$. Dès lors, il permute exclusivement entre elles les combinaisons ayant λ_1 lettres communes avec ces λ lettres et, par suite, B' n'est pas transitif, puisqu'on peut choisir $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_1 > 0$.

THÉOREME. — *Si G₂ et G₃ sont les isomorphes primitifs et holoédriques de la deuxième catégorie du groupe symétrique ou alterné S de n éléments, formés respectivement par les substitutions que S opère entre les combinaisons 2 à 2 et 3 à 3 de ces n éléments, G₂ et G₃ sont isomorphes, et à tout sous-groupe de G₃ transitif entre les lettres de G₃ correspond dans G₂ un sous-groupe transitif entre les lettres de G₂.*

Soient B'₃ un sous-groupe de G₃ transitif entre les lettres de G₃, B'₂ et B les sous-groupes correspondants de G₂ et S : nous savons déjà que B est transitif entre les n lettres de S.

Supposons que B'₂ ne soit pas transitif : B et B'₂ permutent exclusivement entre elles λ combinaisons 2 à 2 des n lettres de S, avec $\lambda < C_n^2$. Or, une combinaison de 3 lettres renferme $C_3^2 = 3$ combinaisons de 2 lettres ; si elle a λ_1 combinaisons de 2 lettres communes avec les λ précédentes, une substitution de B ou B'₂ la remplace par une autre ayant λ_1 combinaisons de 2 lettres communes avec les λ précédentes. Donc, B permutant transitivement les combinaisons de 3 lettres, chacune de ces dernières contiendra le même nombre λ_1 des λ combinaisons de 2 lettres précitées. Enfin, si l'on avait $\lambda_1 = 3$, B'₃ étant transitif, il faudrait $\lambda = C_n^2$,

et B'_2 serait transitif, contrairement à l'hypothèse; si l'on a $\lambda_1 = 2$, chaque combinaison de 3 lettres en renferme une et une seule de 2 lettres ne faisant pas partie des λ précédentes; B permute exclusivement entre elles les combinaisons ne faisant pas partie de ces λ , et l'on peut trouver un nombre λ' de combinaisons de 2 lettres, analogue à λ , et pour lequel le nombre λ'_1 , analogue à λ_1 , est $= 1$. On peut donc supposer, si l'on veut, $\lambda_1 = 1$.

Ceci posé, considérons la combinaison $a_1 a_2 a_3$: elle contiendra une et une seule combinaison de deux lettres, par exemple $a_1 a_2$, faisant partie des λ précitées. Alors $a_1 a_2 a_i$, avec $i = 3, 4, \dots, n$, sera dans le même cas. Donc $a_1 a_i$, avec $i = 3, 4, \dots, n$, n'est pas contenue dans ces λ ; de même pour $a_2 a_i$. La considération de $a_1 a_3 a_4$ et de $a_1 a_3 a_5$ montre, par suite, que $a_3 a_4$ et $a_3 a_5$ sont contenues dans les λ précitées.

Mais la considération de $a_3 a_4 a_5$ montre aussi que l'une des combinaisons $a_3 a_4$ et $a_3 a_5$ n'est pas contenue dans les λ précitées. On est ainsi conduit à une contradiction et l'on en conclut que B'_2 est transitif.

En terminant ce paragraphe, nous allons examiner si, pour certains cas particuliers, on peut avoir dans les groupes G des sous-groupes réguliers.

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un isomorphe holoédrique et primitif G d'un groupe symétrique ou alterné S de n lettres, formé des substitutions opérées par S entre les C_n^2 combinaisons 2 à 2 des n lettres (n étant premier), renferme un groupe régulier, de degré C_n^2 , est que n soit de la forme $4h + 3$.*

Soit B' le sous-groupe régulier de G, d'ordre C_n^2 , et B le sous-groupe correspondant de S : B est linéaire et dérivé des substitutions

$$U = |x; x + 1|, \quad V = |x; b^2 x| \pmod{n},$$

où b racine primitive $(\pmod{n})$. La substitution la plus générale de B est

$$W = |x; p^2 x + q| \pmod{n},$$

où p^2 est résidu quadratique de n . Les n lettres sont ici représentées par $0, 1, 2, \dots, n-1 \pmod{n}$ et W remplace la combinaison l, m par la combinaison $p^2 l + q, p^2 m + q$.

La condition nécessaire et suffisante pour que B' soit régulier est évidemment qu'aucune substitution $W \neq 1$ de B ne laisse une seule combinaison immobile, c'est-à-dire qu'aucun des deux systèmes de congruences

$$l \equiv p^2 l + q, \quad m \equiv p^2 m + q, \quad (\text{mod } n),$$

ou

$$l \equiv p^2 m + q, \quad m \equiv p^2 l + q, \quad (\text{mod } n),$$

ne soit possible.

Le premier exigerait $(l - m)(p^2 - 1) \equiv 0 \pmod{n}$ et le second $(l - m)(p^2 + 1) \equiv 0 \pmod{n}$, pour $l \neq m$. La première condition entraîne $W = 1$, la seconde $p^2 \equiv -1 \pmod{n}$, d'où $n = 4h + 1$. Si d'ailleurs n est de cette forme, la substitution $|x; -x|$ laisse immobile les combinaisons l, m , pour lesquelles $l + m \equiv 0 \pmod{n}$, et B' n'est pas régulier. C. Q. F. D.

THÉORÈME. — *Un isomorphe holoédrique et primitif G d'un groupe symétrique ou alterné S de n lettres, formé des substitutions opérées par S entre les combinaisons 3 à 3 des n lettres (n étant premier et ≥ 7), ne renferme aucun sous-groupe régulier de même degré C_n^3 que celui de G .*

Car si G renfermait un pareil sous-groupe B' d'ordre C_n^3 , soit B le sous-groupe correspondant de S : B serait transitif entre les n lettres de S et d'ordre $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Ici $\frac{(n-1)(n-2)}{6}$ ne divise pas $n-1$; donc, d'après un théorème de MM. Mathieu ⁽¹⁾ et Sylow ⁽²⁾, on a

$$C_n^3 = n \nu (bn + 1) \quad \text{avec} \quad b > 0, \quad \nu \leq 1,$$

$bn + 1$ étant le nombre des groupes d'ordre n contenus dans B ;

⁽¹⁾ *Journal de Liouville*, 1861.

⁽²⁾ *Math. Ann.*, t. V, p. 584.

par suite.

$$\nu(bn+1) = \frac{(n-1)(n-2)}{6},$$

$$3\nu = \beta n + 1 \quad \text{avec} \quad \beta > 0,$$

$$2(\beta n + 1)(bn + 1) = (n-1)(n-2),$$

ce qui est absurde, puisque $b > 0$, $\beta > 0$.

C. Q. F. D.

Remarque. — On peut même, en remarquant que ν doit diviser $n-1$, établir un théorème analogue pour les isomorphes holédriques et primitifs G des groupes symétrique ou alterné S de n lettres, formés des substitutions opérées par S entre les combinaisons α à α des n lettres (n étant premier et $\geq 2\alpha + 1$), quand α est impair ou quand il est pair sans diviser $n-1$.

II.

M. Jordan a montré ⁽¹⁾ que tout groupe primitif G de degré n , qui ne contient pas le groupe alterné de n éléments, mais renferme une substitution d'ordre premier p à q cycles, contient un groupe Γ , transitif entre les lettres qu'il permute, et pour le degré duquel on peut trouver une limite supérieure en fonction de $n = pq$.

Reportons-nous à la démonstration en question. Le degré de Γ ne peut être inférieur à celui de G que si G est deux fois transitif; dans ce cas, on a ⁽²⁾

$$(1) \quad n \leq \frac{1}{4} n - 1.$$

Si G n'est qu'une fois transitif, son degré est égal à celui de Γ , et cette remarque permet d'améliorer légèrement la limite la plus exacte ⁽³⁾ trouvée par M. Jordan pour n en fonction de p et q .

Mais on peut déduire facilement de sa démonstration une limite plus avantageuse dans certains cas particuliers. En effet, supposons que G ne soit qu'une fois transitif : pour former Γ ,

⁽¹⁾ *J. für Math.*, t. LXXIX, p. 248-258; 1870.

⁽²⁾ A. BOCHERT, *Math. Ann.*, t. XL, p. 176.

⁽³⁾ *Loc. cit.*, p. 255.

qui est de degré n , on forme une suite de groupes

$$(2) \quad \Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_\mu,$$

tels que si Γ_i permute transitivement entre elles M_i lettres convenablement choisies, Γ_{i+1} , qui contient Γ_i , en permute de même au moins $e_i M_i$ comprenant les M_i précédentes, avec $e_i = \frac{p}{E\left(\frac{p}{2}\right)}$,

ainsi que des lettres non déplacées par Γ_i . L'ordre de Γ_{i+1} est dès lors au moins égal à celui de Γ_i multiplié par $e_i M_i$. Or $M_i \geq e_1^i p$, en sorte que les groupes (2) sont d'ordres respectifs au moins égaux à

$$(3) \quad p, e_1 p^2, e_1^3 p^3, \dots, e_1^{\frac{\mu(\mu+1)}{2}} p^{\mu+1}.$$

On forme ensuite une seconde série de groupes

$$(4) \quad \Gamma_\mu, \Gamma_{\mu+1}, \Gamma_{\mu+2}, \dots, \Gamma_{\mu+\tau} = \Gamma,$$

avec

$$\tau \leq K_\mu - 1 \leq (\mu + 1)q - e_1 \frac{e_1^\mu - 1}{e_1 - 1} - 1,$$

et tels que chacun d'eux contienne le précédent, et au moins une substitution d'ordre p à q cycles non contenue dans ce précédent; en sorte que l'ordre de $\Gamma_{\mu+j+1}$ est au moins égal à celui de $\Gamma_{\mu+j}$ multiplié par p . Les groupes (4) sont donc d'ordres respectifs au moins égaux à

$$(5) \quad e_1^{\frac{\mu(\mu+1)}{2}} p^{\mu+1}, e_1^{\frac{\mu+1(\mu+2)}{2}} p^{\mu+2}, \dots, e_1^{\frac{\mu+\tau(\mu+\tau+1)}{2}} p^{\mu+\tau+1}.$$

On a de plus

$$e_1^{\mu-1} p \leq q E\left(\frac{p}{2}\right),$$

ou

$$(6) \quad e_1^\mu \leq q.$$

Γ_μ étant de degré

$$(7) \quad N_\mu \leq (\mu + 1)pq - p \frac{e_1^\mu - 1}{e_1 - 1},$$

Γ est de degré

$$(8) \quad n \leq N_\mu + \tau q.$$

et il en est de même de G qui contient Γ . Dès lors, si G est l'ordre de G , (5) donne

$$G \leq e_1^{\frac{\mu(\mu+1)}{2}} p^{\mu+\tau+1},$$

$$\tau \leq \frac{\log G}{\log p} - \frac{\mu(\mu+1)}{2} \frac{\log e_1}{\log p} - (\mu+1),$$

et, d'après (7) et (8),

$$n \leq (\mu+1)pq - p \frac{e_1^\mu - 1}{e_1 - 1} + q \left[\frac{\log G}{\log p} - \frac{\mu(\mu+1)}{2} \frac{\log e_1}{\log p} - \mu - 1 \right].$$

Sans chercher à discuter complètement cette formule, nous remarquerons qu'elle donne de suite

$$n - \frac{q \log G}{\log p} \leq (\mu+1)(p-1)q \leq (p-1)q \frac{\log(qe_1)}{\log 2},$$

d'après (6): ou, *a fortiori*, puisque $qe_1 \leq pq = u$,

$$\log G \geq p \log p \left(\frac{n}{u} - \frac{p-1}{p} \frac{\log u}{\log 2} \right).$$

Si $n \log 2 \geq u \log u$, le second membre est fonction croissante de p , qui est ≥ 2 , et, par suite,

$$\log G \geq \left(\frac{n}{u} - \frac{\log u}{2 \log 2} \right) 2 \log 2.$$

ou

$$(9) \quad G u \geq 2^{\frac{2n}{u}}.$$

Or, si $n \log 2 < u \log u$, on a

$$2 \frac{n \log 2}{u} - \log u < \log u,$$

et la condition (9) est satisfaite, puisque $n \leq u$, $G > n$, G étant primitif. Donc

THÉORÈME. — Si G est un groupe primitif, une seule fois transitif, d'ordre G , de degré n et de classe u , on a

$$(9) \quad G u \geq 2^{\frac{2n}{u}}.$$

Corollaire I. — Si l'on sait que G est d'ordre $g \leq n^k$, on aura

$$u \geq \frac{n}{\log n} \frac{\log 4}{k+1}.$$

Car, d'après $u < n, (g)$ donne

$$n^{k+1} \geq 4^u.$$

Corollaire II. — Un isomorphe holoédrique et primitif G de la troisième catégorie, de degré φ , d'un groupe symétrique ou alterné S de n éléments, est de classe au moins égale à

$$\frac{\varphi}{\log \varphi} \frac{\log 4}{4},$$

sauf peut-être pour quelques petites valeurs de n .

G étant issu d'un sous-groupe T de S primitif, ne contenant pas de substitution circulaire d'ordre 3, on a, d'après un théorème ⁽¹⁾ de M. Bocher, et suivant que S est symétrique ou alterné,

$$\varphi \geq \left[E \left(\frac{n+1}{2} \right) \right]! \quad \text{ou} \quad 2\varphi \geq \left[E \left(\frac{n+1}{2} \right) \right]!.$$

On voit sans peine, soit à l'aide de la formule connue

$$\left(\frac{p}{e} \right)^{p+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi e} < p! < \left(\frac{p}{e} \right)^{p+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi e} e^{\frac{1}{12p}},$$

soit directement, qu'on a

$$g < \varphi^3,$$

sauf pour de petites valeurs de n ; il ne reste plus qu'à appliquer le corollaire I.

III.

Nous nous contenterons ici d'énoncer les propriétés suivantes ⁽²⁾ :

⁽¹⁾ *Math. Ann.*, t. XXXIII, p. 584.

⁽²⁾ Elles seront établies en détail dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse* pour 1896.

I. Soit m un nombre impair quelconque, k un nombre plus petit que le plus petit diviseur ε de m : un groupe G transitif, de classe m , de degré $m + k$, avec $0 < k < \varepsilon$, renfermant un sous-groupe M d'ordre, de degré et de classe m , ne peut exister que si $k \leq 2$ et $m + 1 = 2^y$.

II. Un groupe transitif de classe ef (e et f premiers, $5 \leq e \leq f$), de degré $ef + k$ (avec $0 < k < e$), ne peut exister qu'à l'une des conditions suivantes :

$$1^{\circ} \quad k \leq 2 \text{ avec } ef = 4h + 3;$$

$$2^{\circ} \quad f > e + 1 = 2^y;$$

$$3^{\circ} \quad f \geq 2e + 3.$$

De plus, dans les deux derniers cas, le groupe ne sera qu'une fois transitif et aura son ordre premier à f .

III. Un groupe transitif de classe e^2 (e premier impair) est de degré e^2 ou $\geq e^2 + e$.

IV. Les groupes transitifs de classe $ef < 100$ (e et f premiers, $5 \leq e \leq f$) sont de degré $ef + k$, avec $k \leq 2$, ou $k \geq e$. Ceux de ces groupes qui sont primitifs sont de degré $\geq ef + e$.

On doit noter qu'il existe un groupe de classe $55 = 5 \cdot 11$ et de degré 60 primitif ⁽¹⁾.

(1) Voir notre Thèse de Doctorat, p. 35.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 MAI 1896.

PRÉSIDENTE DE M. KÖNIGS.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société :

M. Pruvost, présenté par MM. Darboux et Appell; M. L. Cosserat, présenté par MM. Königs et E. Cosserat; M. Fontaneau, présenté par MM. Lemoine et Königs; M. Sanchez, présenté par MM. Tisserand et Goursat; MM. Rougier et Jacquet, présentés par MM. Appell et Königs; M. Tresse, présenté par MM. Bourlet et Bondon; M. Greenhill, présenté par MM. Emile Picard et D. André.

Communications :

M. LAISANT résume une Note, adressée par M. Shunkichi Kimura, de Tokio (Japon), ayant pour titre : *Certaines applications des quaternions*, et qui, étant rédigée en anglais, ne peut être insérée au *Bulletin*.

La première application étudiée par l'auteur se rapporte au mouvement d'un point sur une surface; on suppose que la force dérive d'un potentiel, et l'on demande que le mouvement s'effectue sur une trajectoire orthogonale des intersections de la surface donnée avec les surfaces de niveau. On trouve très simplement que la trajectoire est une géodésique de la surface donnée. L'auteur rappelle que ce problème a été étudié par Liouville et par M. de Saint-Germain.

La seconde application concerne l'épaisseur de la couche comprise entre deux positions voisines d'une surface fermée, question qui intervient dans la théorie du magnétisme. M. Kimura traite en particulier le cas de l'ellipsoïde à l'aide de calculs notablement plus simples que par les coordonnées cartésiennes.

SÉANCE DU 20 MAI 1896.

PRÉSIDENTE DE M. KOENIGS.

Communications :

M. Fleury : *Sur les séries.*

M. Kœnigs : *Sur les mouvements périodiques d'un corps pesant autour d'un point fixe.*

M. Laisant : *Sur une génération du triangle de Pascal.*

M. D'OCAGNE communique un *théorème relatif à la théorie des abaques*, dont voici l'énoncé :

Toute équation représentable par trois systèmes du premier degré de droites isoplèthes est de la forme

$$\Lambda_{12} x_1 x_2 + \Lambda_{23} x_2 x_3 + \Lambda_{31} x_3 x_1 + \Lambda_1 x_1 + \Lambda_2 x_2 + \Lambda_3 x_3 + \Lambda_0 = 0,$$

mais ce n'est pas l'équation la plus générale de ce type. Le caractère algébrique de ces équations est le suivant : le discriminant de la forme du premier membre rendue homogène est positif.

Dans le cas où $\Lambda = 0$, l'équation, où l'on considère x_1, x_2 et x_3 comme des coordonnées courantes, représente un hyperboloïde à une nappe.

M. MANGEOT adresse la Note suivante :

Sur une manière de représenter le rapport des deux courbures d'une courbe gauche.

Soient γ une courbe gauche; m un point donné de la courbe; R et T ses rayons de courbure et de torsion en ce point; mx, my, mz trois axes rectangulaires issus de m , le premier touchant γ en m ; x, y, z les coordonnées d'un point variable p de γ par rapport à ces axes.

Je regarde x comme la variable indépendante.

On a, au point m ,

$$\begin{aligned} x - y - z &= 0, \\ dx &= dy = 0. \end{aligned}$$

et, par suite,

$$R = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0^2 + \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)_0^2}},$$

$$T = \pm \frac{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0^2 + \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)_0^2}{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0 \left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)_0 - \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)_0 \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_0};$$

l'indice 0 désigne les valeurs que prennent au point m les dérivées qui en sont affectées.

Construisons, dans un plan, le point P qui a pour coordonnées $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ par rapport à deux axes rectangulaires OX, OY, choisis à volonté dans ce plan. Lorsque le point p décrit la courbe γ , le point P décrit dans le plan XOY une certaine courbe Γ passant à l'origine O. Le rayon de courbure ρ de la courbe Γ , en ce point O qui correspond au point m de γ , a pour valeur

$$\rho = \frac{\left[\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0^2 + \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)_0^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0 \left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)_0 - \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)_0 \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_0}.$$

En comparant les trois formules précédentes, on voit que l'on doit avoir

$$T = \rho R.$$

De là une proposition qui peut s'énoncer ainsi :

Étant données une courbe gauche γ , et une de ses tangentes mt , la touchant en m , si l'on mène par cette droite deux plans rectangulaires Π, Π' puis que l'on construise, dans un plan arbitraire, une courbe Γ ayant pour coordonnées rectangulaires les tangentes des angles v, v' que fait mt avec les projections sur Π et Π' d'une tangente quelconque de γ , le rayon de courbure de Γ , à l'origine des coordonnées, mesuré avec l'unité de longueur qui a servi pour la construction de Γ , sera égal au rapport de la courbure de γ à sa torsion, au point m .

Si l'unité de longueur en question est prise égale au rayon de

courbure R de γ , ce qui revient à dire que l'on prend les formules

$$X = R \operatorname{tang} e, \quad Y = R \operatorname{tang} e',$$

pour construire la courbe Γ , la courbure de Γ représentera exactement la torsion de γ .

La proposition que je viens d'indiquer peut être énoncée sous cette autre forme :

Les équations $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$ étant censées représenter, en axes rectangles Ox , Oy , Oz , une courbe à double courbure touchant l'axe des x au point O , si on les différencie relativement à x , ce qui donne les formules

$$f'_x + y' f'_y + z' f'_z = 0, \quad \varphi'_x + y' \varphi'_y + z' \varphi'_z = 0,$$

puis que l'on élimine x , y , z entre les quatre équations précédentes, la relation obtenue, où l'on regarderait y' et z' comme les coordonnées rectangulaires d'un point, définit une courbe plane dont le rayon de courbure à l'origine est égal au rapport des rayons de torsion et de courbure de la courbe gauche, au point O .

Regardons encore y' et z' comme les rapports de deux coordonnées d'un point de l'espace à la troisième. Alors le lieu des points de l'espace, pour lesquels les quatre équations précédentes sont vérifiées simultanément, est un cône, dont l'interprétation conduit à ce théorème de Géométrie :

Lorsqu'un point se déplace sur une génératrice G d'un cône quelconque, le rayon de courbure principal du cône en ce point varie proportionnellement à sa distance au sommet du cône, et le coefficient de proportionnalité est égal au rapport de la première à la seconde courbure d'une courbe quelconque ayant ses tangentes parallèles aux génératrices du cône, ces courbures étant relatives au point où la tangente est parallèle à G .

Voici quelques conséquences de ce théorème :

1^{re} La loi de variation du rapport des courbures d'une courbe gauche, aux différents points de la courbe, est la même que celle du rayon principal d'un cône en un point qui reste à une distance

constante du sommet, et ce cône est celui dont les génératrices sont parallèles aux tangentes de la courbe ;

2° Pour que, tout le long de la courbe, le rapport des deux courbures soit constant, il faut et il suffit que le cône correspondant soit de révolution, c'est-à-dire que la courbe soit une hélice : résultat d'ailleurs bien connu ;

3° Quand une droite mobile engendre une développable, on peut connaître le rapport des courbures en un point de l'arête de rebroussement sans connaître ni cette courbe ni la position du point.

SÉANCE DU 3 JUIN 1896.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. Lucien Lévy : *Sur un essai récent de démonstration du postulat d'Euclide.*

M. D. André : *Théorème nouveau de réversibilité algébrique.*

M. L. Lecornu : *Sur le problème de l'escarpolette.*

M. Carvallo : *Généralisation et extension à l'espace du théorème de Cauchy sur le résidu relatif à un pôle.*

M. CARVALLO communique, de la part de M. Larose, une *Démonstration du théorème de M. Vaschy, sur une distribution quelconque de vecteur.*

SÉANCE DU 17 JUIN 1896.

PRÉSIDENCE DE M. RIOCHE.

Communications :

M. Touche : *Sur le mouvement d'un disque dans un fluide.*

M. Painlevé : *Sur le frottement des solides entre eux.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

MÉMOIRE SUR LA CONSTITUTION DES ATOMES ET SUR L'ACTION DE LA MATIÈRE SUR LA MATIÈRE;

Par M. DUPORT.

1. Les atomes étant des parcelles de matière continue peuvent être considérés comme fluides ou comme solides. Je me suis proposé de discuter, dans ce Mémoire, l'hypothèse de la fluidité des atomes.

Les atomes étant considérés comme fluides, leurs différentes parties agissent les unes sur les autres, et il paraît naturel d'admettre que cette action s'effectue point matériel à point matériel, et dès lors l'action d'un point matériel sur un autre ne peut plus dépendre que des positions de ces points et de leurs vitesses.

L'hypothèse de la continuité de la matière, jointe à celle de l'existence de la loi précédente et à certaines considérations de symétrie, fournit alors des équations suffisantes pour déterminer cette loi.

Telle est l'idée séduisante qui a été le point de départ de ces recherches. Malheureusement on n'est conduit, comme on le verra, qu'à des impossibilités. J'ai ainsi été amené à démontrer l'incompatibilité de la fluidité de l'atome et de l'existence d'une loi d'attraction de la matière sur la matière s'effectuant point matériel à point matériel. Cette proposition se laisse assez facilement démontrer, de sorte que la conclusion de ce Mémoire est, ou bien la nécessité de considérer les atomes comme de petits corps solides, ou la nécessité de considérer l'action d'un atome sur un de ses points comme une action d'ensemble.

Je suivrai l'ordre dans lequel les idées se sont succédé dans mon esprit. La recherche de la loi d'attraction, bien qu'étant démontrée plus tard être impossible, conduit à des discussions d'intégrales assez curieuses et à des calculs intéressants. C'est ce qui m'a décidé à conserver ce travail dans sa totalité, au lieu de me borner à la démonstration des conclusions.

2. Considérons donc un atome et soit $\frac{1}{3}\pi R^3$ son volume. Sup-

posons-le seul au monde et donnons-lui la forme limitée par deux sphères concentriques. Soit O le centre de ces deux sphères et soit M un point quelconque de cette portion de matière. Supposons la vitesse initiale de M nulle ou placée sur OM, et sa projection sur OM en grandeur et en signe ne dépendant que de la distance OM, que nous désignerons par r . Il est clair que, par symétrie dans le mouvement qui se produira, la vitesse de M restera placée sur OM, et que sa projection sur OM en grandeur et en signe sera une fonction de r et du temps t . Désignons cette projection par V .

Soient Ox , Oy , Oz trois axes de coordonnées rectangulaires. Soient u , v , w les composantes de la vitesse de M. On aura

$$u = Hx, \quad v = Hy, \quad w = Hz,$$

avec

$$H = \frac{V}{r}.$$

L'équation de continuité

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

donne

$$\frac{dH}{dr} + 3H = 0,$$

d'où

$$H = \frac{C}{r^3},$$

C étant une fonction du temps. On aura donc

$$V = \frac{C}{r^2};$$

V peut encore s'exprimer par $\frac{dr}{dt}$. On aura donc

$$\frac{dr}{dt} = \frac{C}{r^2}.$$

Cherchons maintenant l'accélération du point M. Elle sera dirigée suivant le rayon vecteur OM, et y aura pour projection

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dC}{dt} \frac{1}{r^2} = 2 \frac{C}{r^3} \frac{dr}{dt} = \frac{dC}{dt} \frac{1}{r^2} = \frac{2C^2}{r^5}.$$

Je vais chercher la loi d'attraction d'un point matériel sur un autre qui donnerait ces résultats.

Si nous nous appuyons sur la proposition générale que le mouvement d'un système matériel est déterminé quand on connaît les positions et les vitesses des points du système à une époque déterminée, nous admettrons que les composantes de la force qui s'exerce entre deux points matériels sont égales aux produits de leurs volumes par des fonctions du temps, des coordonnées des points et des composantes de leurs vitesses, fonctions qui ne peuvent, dès lors, plus dépendre que de la nature simultanée des matières qui composent les deux points matériels. Conformément à la notion du temps, nous admettrons qu'il n'entre pas dans ces fonctions. Si nous nous bornons maintenant au cas où les vitesses initiales des deux points sont nulles, les composantes de la force ne dépendront que des coordonnées des points. Conformément à la notion de l'espace, nous considérerons comme évident que la force ne dépend que de la position relative des deux points. Par suite, elle sera dirigée suivant la droite qui les joint, et sa grandeur sera fonction seulement de leur distance.

Soient M et A les deux points matériels, supposés infiniment petits, de même matière et en repos. Soit $dv dv' F(r)$ la projection sur AM de l'action de M sur A, dv étant le volume infiniment petit de A, dv' le volume infiniment petit de M. Soit $f(r)$ la fonction potentielle correspondant à $F(r)$, c'est-à-dire une fonction ayant pour dérivée $-F(r)$.

Revenons à notre portion de matière comprise entre deux sphères de centre O ; soit ρ_1 sa densité, R_1 le rayon de la plus petite sphère, R_2 le rayon de la plus grande, A un de ses points. M un autre point quelconque. Soit a la distance OA. En supposant cette portion de matière en repos à l'époque initiale, l'accélération de A sera placée sur OA et y aura pour projection

$$\left(\frac{dC}{dt} \right)_0 \frac{1}{a^2}.$$

La résultante des actions de la portion de matière sur le point A doit donc être placée sur OA et y avoir pour projection

$$\rho_1 dv \left(\frac{dC}{dt} \right)_0 \frac{1}{a^2}.$$

Le potentiel de l'action de la portion de matière sur le point A est

$$dv \iiint f(r) dv'.$$

L'intégrale triple étant étendue au volume compris entre les deux sphères est une fonction de R_1 , R_2 et a , et comme on a

$$R_2^3 - R_1^3 = R^3,$$

c'est, en somme, une fonction de R_1 et de a . En la dérivant par rapport à a , on doit avoir la projection sur OA de la force qui agit sur A, c'est-à-dire

$$\varphi_1 dv \left(\frac{dC}{dt} \right)_0 \frac{1}{a^2}.$$

Donc cette intégrale triple

$$\iiint f(r) dv'$$

doit être égale à

$$\frac{M}{a} + N,$$

M et N étant des fonctions de R_1 , et l'on aura

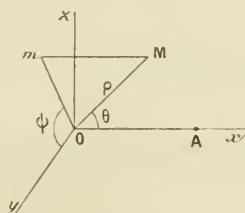
$$M = -\varphi_1 \left(\frac{dC}{dt} \right)_0.$$

Cette équation déterminera la valeur de $\left(\frac{dC}{dt} \right)_0$. Pour le moment, il faut déterminer la fonction $f(r)$ de façon que l'on ait

$$\iiint f(r) dv' = \frac{M}{a} + N.$$

Soient φ , θ , ψ les coordonnées polaires de M, Ox étant l'axe

Fig. 1.



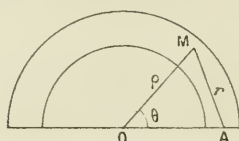
polaire que nous supposons dirigé suivant OA (fig. 1).

On a

$$\int \int \int f(r) dv' = \int \int \int f(r) \varphi^2 d\varphi \sin \theta d\theta d\psi = 2\pi \int \int f(r) \varphi^2 d\varphi \sin \theta d\theta,$$

l'intégrale double étant étendue à l'intérieur de deux demi-circon-

Fig. 2.



férences de centre O, de rayons R_1 et R_2 , et limitées au diamètre OA (fig. 2). On doit donc avoir

$$\int \int f(r) \varphi^2 d\varphi \sin \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{M}{a} + N \right).$$

Substituons à la variable θ la variable r ; comme on a

$$r^2 = a^2 + \varphi^2 - 2a\varphi \cos \theta,$$

d'où

$$r dr = -a\varphi \sin \theta d\theta;$$

l'intégrale à évaluer devient

$$\int \int f(r) \frac{\varphi d\varphi r dr}{a}.$$

Posons

$$\varphi'(r) = r f(r).$$

Cette intégrale devient

$$\int_{R_1}^a [\varphi(a + \varphi) - \varphi(a - \varphi)] \frac{\varphi d\varphi}{a} + \int_a^{R_2} [\varphi(a + \varphi) - \varphi(\varphi - a)] \frac{\varphi d\varphi}{a}.$$

Posons

$$\psi'(r) = r\varphi(r), \quad \chi'(r) = \varphi(r),$$

et l'intégrale devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} [\psi(a + R_2) - \psi(a + R_1)] - \chi(a + R_2) + \chi(a + R_1) \\ & + \frac{1}{a} [\psi(a - R_1) - \chi(a - R_1)] - \frac{1}{a} [\psi(R_2 - a) - \chi(R_2 - a)] + \chi(0). \end{aligned}$$

On aura donc l'équation

$$\frac{1}{a} [\psi(a + R_2) - \psi(a + R_1)] - \gamma(a + R_2) + \gamma(a + R_1) + \frac{1}{a} \psi(a - R_1) \\ - \gamma(a - R_1) - \frac{1}{a} \psi(R_2 - a) - \gamma(R_2 - a) + 2\gamma(0) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{M}{a} + N \right).$$

Multiplions les deux membres par a , puis dérivons par rapport à a , il vient

$$R_2[\gamma'(R_2 + a) + \gamma'(R_2 - a)] - \gamma(R_2 + a) - \gamma(R_2 - a) \\ - R_1[\gamma'(a + R_1) + \gamma'(a - R_1)] + \gamma(a + R_1) - \gamma(a - R_1) + 2\gamma(0) = \frac{N}{2\pi}.$$

Dérivons encore une fois par rapport à a , il vient

$$(1) \quad \begin{cases} R_2[\gamma''(R_2 + a) - \gamma''(R_2 - a)] - \gamma'(R_2 + a) + \gamma'(R_2 - a) \\ = R_1[\gamma''(a + R_1) + \gamma''(a - R_1)] - \gamma'(a + R_1) + \gamma'(a - R_1), \end{cases}$$

cette équation a lieu pour toutes les valeurs de R_2 et de R_1 satisfaisant à la relation

$$R_2^3 - R_1^3 = R^3.$$

On peut donc la dériver par rapport à R_1 , en considérant R_2 comme une fonction de R_1 . Comme on a

$$\frac{dR_2}{dR_1} = \frac{R_1^2}{R_2^2},$$

il vient

$$(2) \quad \frac{\gamma'''(R_2 + a) - \gamma'''(R_2 - a)}{R_2} = \frac{\gamma'''(a + R_1) - \gamma'''(a - R_1)}{R_1}.$$

Dérivons encore une fois par rapport à R_1 . On obtient

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{R_2[\gamma^{iv}(R_2 + a) - \gamma^{iv}(R_2 - a)] - \gamma'''(R_2 + a) + \gamma'''(R_2 - a)}{R_2^2} \\ = \frac{R_1[\gamma^{iv}(a + R_1) + \gamma^{iv}(a - R_1)] - \gamma'''(a + R_1) + \gamma'''(a - R_1)}{R_1^2}. \end{cases}$$

D'autre part en dérivant deux fois par rapport à a l'équation (1), il vient

$$R_2[\gamma^{iv}(R_2 + a) - \gamma^{iv}(R_2 - a)] - \gamma'''(R_2 + a) + \gamma'''(R_2 - a) \\ = R_1[\gamma^{iv}(a + R_1) + \gamma^{iv}(a - R_1)] - \gamma'''(a + R_1) + \gamma'''(a - R_1).$$

En comparant cette équation avec l'équation (3), on voit que l'on aura séparément

$$(4) \quad \begin{cases} R_2[\chi^{iv}(R_2+a) - \chi^{iv}(R_2-a)] - \chi'''(R_2+a) + \chi'''(R_2-a) = 0, \\ R_1[\chi^{iv}(a+R_1) + \chi^{iv}(a-R_1)] - \chi'''(a+R_1) + \chi'''(a-R_1) = 0. \end{cases}$$

Prenons par exemple la première de ces équations. Dérivons-la par rapport à R_2 . On a

$$R_2[\chi^v(R_2+a) - \chi^v(R_2-a)] = 0,$$

ou bien

$$\chi^v(R_2+a) = \chi^v(R_2-a).$$

Dérivant cette équation par rapport à R_2 puis à a , on a séparément

$$\chi^{vi}(R_2+a) = \chi^{vi}(R_2-a)$$

$$\chi^{iv}(R_2+a) = -\chi^{vi}(R_2-a).$$

On aura donc

$$\chi^{vi}(r) = 0,$$

$$\chi^v(r) = A,$$

$$\chi^{iv}(r) = Ar + B,$$

$$\chi'''(r) = \frac{A}{2}r^2 + Br + C,$$

A, B, C étant des constantes. Substituons ces valeurs dans la première équation (4), il vient

$$R_2[A(R_2+a) + B - A(R_2-a) - B]$$

$$- \frac{A}{2}(R_2+a)^2 - B(R_2+a) - C + \frac{A}{2}(R_2-a)^2 + B(R_2-a) + C = 0,$$

ou bien

$$-2Ba = 0,$$

On a donc

$$B = 0,$$

La seconde équation (4) ne donne rien. On a donc

$$\chi'''(r) = \frac{A}{2}r^2 + C,$$

$$\chi''(r) = \frac{A}{6}r^3 + Cr + D,$$

$$\chi'(r) = \frac{A}{24}r^4 + \frac{C}{2}r^2 + Dr + E,$$

D, E étant de nouvelles constantes. Substituons ces valeurs dans (1), on a

$$\begin{aligned} & R_2 \left[\frac{A}{6} (R_2 + a)^3 + C(R_2 + a) + D - \frac{A}{6} (R_2 - a)^3 - C(R_2 - a) - D \right] \\ & - \frac{A}{24} (R_2 - a)^4 - \frac{C}{2} (R_2 + a)^2 - D(R_2 + a) - E \\ & + \frac{A}{24} (R_2 - a)^4 + \frac{C}{2} (R_2 - a)^2 + D(R_2 - a) + E \\ = & R_1 \left[\frac{A}{6} (R_1 + a)^3 + C(R_1 + a) + D + \frac{A}{6} (a - R_1)^3 + C(a - R_1) + D \right] \\ & - \frac{A}{24} (a + R_1)^4 - \frac{C}{2} (a + R_1)^2 - D(a + R_1) - E \\ & + \frac{A}{24} (a - R_1)^4 + \frac{C}{2} (a - R_1)^2 + D(a - R_1) + E. \end{aligned}$$

En effectuant les simplifications on a

$$2 \frac{A}{3} R_2^3 a - 2Da = 2 \frac{A}{3} R_1^3 a$$

ou

$$D = \frac{A}{3} R^3.$$

On a donc

$$\chi''(r) = \frac{A}{6} r^3 + Cr + \frac{A}{3} R^3,$$

or on a

$$\chi'(r) = \varphi(r), \quad \chi''(r) = \varphi'(r) = r f(r).$$

On aura donc

$$f(r) = \frac{A}{6} r^2 + C + \frac{A}{3} \frac{R^3}{r}$$

et par suite

$$(5) \quad F(r) = \frac{A}{3} \frac{R^3}{r^2} - \frac{A}{3} r = \alpha \left(\frac{R^3}{r^2} - r \right),$$

α étant une nouvelle constante qui doit être positive. Il est aisé de voir que cette expression satisfait, car, dans l'attraction proportionnelle à la distance, la masse peut être concentrée au centre de gravité et l'on a, en somme, pour l'action de la matière comprise entre les deux sphères concentriques sur le point A, l'expression

$$- \alpha \frac{4}{3} \pi R^3 a + \alpha R^3 \left(\frac{4}{3} \pi a^3 - \frac{4}{3} \pi R_1^3 \right) \frac{1}{a^2} = - \frac{4}{3} \pi \alpha R^3 R_1^3 \frac{1}{a^2}.$$

Revenons à l'expression (5) de la force qui agit entre deux points matériels de même matière. On voit que R, rayon de la sphère qui représente le volume de la portion de matière considérée, y entre; cela exige que l'on ait réuni toute la matière de cette nature qui existe au monde; c'est par conséquent opposé à l'existence propre des atomes; même, en admettant cela, il reste bizarre que l'action d'un point matériel sur un autre de même nature dépende de la quantité de matière de cette nature qui existe au monde. Enfin, la présence d'une répulsion, proportionnelle à la distance, offre aussi des difficultés. A cela on pourrait objecter que, peut-être, l'expression de la force dans le mouvement s'opposerait à des mouvements dans lesquels la vitesse et la force grandiraient indéfiniment. Je note ces objections qui me paraissent s'opposer à l'adoption d'une loi d'action de la matière sur la matière, point matériel à point matériel et je continue.

On peut trouver l'expression (5) de la force en se passant de la fonction potentielle. Le calcul, en effet, n'est pas complètement rigoureux à cause du terme en $\frac{1}{r^2}$ qui grandit indéfiniment quand r tend vers zéro.

Cherchons alors directement à trouver une fonction $F(r)$ telle que l'on ait

$$(6) \quad \int_0^a F(r) \frac{r^2 + a^2 - \varphi^2}{2ar} \frac{\varphi d\varphi r dr}{a} = \frac{M}{2\pi} \frac{1}{a^2}.$$

Les limites et les notations étant les mêmes que pour l'intégrale double précédente, le cosinus de l'angle de AM avec Ox étant

$$= \frac{r^2 + a^2 - \varphi^2}{2ar},$$

l'équation (6) peut s'écrire

$$\int_0^a \int_0^a F(r) (r^2 + a^2 - \varphi^2) \varphi d\varphi dr = \frac{M}{\pi},$$

ou bien

$$\int_{R_1}^a d\varphi \int_{a-\varphi}^{a+\varphi} \varphi F(r) (r^2 + a^2 - \varphi^2) dr = \int_a^{R_2} d\varphi \int_{\varphi-a}^{\varphi+a} \varphi F(r) (r^2 + a^2 - \varphi^2) dr = \frac{M}{\pi}.$$

Dérivons cette équation par rapport à R_1 , il vient

$$-\int_{a-R_1}^{a+R_1} \frac{r^2 + a^2 - R_1^2}{R_1} F(r) dr + \int_{R_2-a}^{R_2+a} \frac{r^2 + a^2 - R_2^2}{R_2} F(r) dr = \frac{1}{\pi} \frac{dM}{dR_1} \frac{1}{R_1^2}.$$

Dérivons cette équation par rapport à a , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{2a^2 - 2aR_1}{R_1} F(a - R_1) - \frac{2a^2 + 2aR_1}{R_1} F(a + R_1) - \int_{a-R_1}^{a+R_1} \frac{2a}{R_1} F(r) dr \\ & + \frac{2a^2 + 2aR_2}{R_2} F(a + R_2) + \frac{2a^2 - 2aR_2}{R_2} F(R_2 - a) + \int_{R_2-a}^{R_2+a} \frac{2a}{R_2} F(r) dr = 0, \end{aligned}$$

ou en divisant par $2a$

$$\begin{aligned} & \frac{a + R_1}{R_1} F(a + R_1) - \frac{a - R_1}{R_1} F(a - R_1) + \frac{1}{R_1} \int_{a-R_1}^{a+R_1} F(r) dr \\ & = \frac{a + R_2}{R_2} F(a + R_2) + \frac{a - R_2}{R_2} F(R_2 - a) + \frac{1}{R_2} \int_{R_2-a}^{R_2+a} F(r) dr, \end{aligned}$$

ou bien, en développant le premier membre en série, suivant les puissances de R_1 ,

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{a}{R_1} \left[2R_1 F'(a) + \frac{R_1^3}{3} F'''(a) + \dots \right] + 2F(a) + R_1^2 F''(a) + \dots \\ + \frac{1}{R_1} \left[2R_1 F(a) + \frac{R_1^3}{3} F''(a) + \dots \right] = H(R_2, a), \end{cases}$$

en représentant par $H(R_2, a)$ le second membre de l'équation précédente. Cette équation (7) peut s'écrire

$$(8) \quad K(a) + R_1^2 S(a) + \dots = H(R_2, a).$$

Dérivons l'équation (8) par rapport à R_1 , on a

$$2R_1 S(a) + \dots = \frac{dH}{dR_2} \frac{R_1^2}{R_2^2}.$$

En faisant $R_1 = 0$ après avoir divisé les deux membres par R_1 , on en tire

$$S(a) = 0.$$

Formons cette équation. C'est

$$a F'''(a) + \frac{1}{3} F''(a) = 0,$$

On en tire

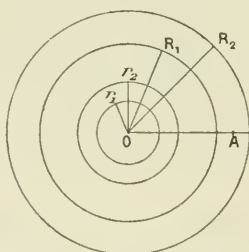
$$F(a) = \frac{A}{a^2} + Ba + C,$$

A, B, C étant des constantes. En partant de cette expression, on trouve très aisément que l'on doit avoir $C = 0$, $A = -BR^3$. On retrouve l'expression (5) en posant

$$B = -\alpha.$$

3. Considérons maintenant deux espèces de matière. Supposons la matière de la première espèce groupée entre deux sphères concentriques de rayons r_1 et r_2 et la matière de la seconde espèce entre deux sphères de rayons R_1 , R_2 , concentriques aux

Fig. 3.



précédentes et supposons tout le système primitivement au repos (fig. 3).

Soit A un point matériel infiniment petit de la seconde espèce de matière, à la distance OA , dv son volume, ρ la densité de la matière de la première espèce, ρ' la densité de la matière de la seconde espèce. L'action totale des deux portions de matière sur le point A, à l'époque initiale, doit, en vertu des mêmes considérations que dans le cas d'une seule espèce de matière, être de la forme

$$\frac{k}{a^2} \rho' dv.$$

Or l'action de la matière de la seconde espèce sur le point A est déjà de cette forme. Il en sera donc de même de l'action de la matière de la première espèce sur le point A. On est donc en somme ramené à chercher une loi d'action entre deux points matériels, telle que l'action d'une portion de matière, comprise entre

deux sphères concentriques sur un point à l'extérieur, soit inversement proportionnelle au carré de la distance, et cela quelles que soient les deux sphères, pourvu que le volume qu'elles comprennent reste le même.

Soit $f(r)$ la fonction potentielle correspondant à cette attraction. L'intégrale

$$\int \int \int f(r) dv',$$

en reprenant toutes les mêmes notations que quand le point A est à l'intérieur de la portion de matière, devra être de la forme

$$\frac{M}{a} + N,$$

et l'on aura

$$\int \int f(r) \frac{\partial d\rho r dr}{a} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{M}{a} + N \right).$$

Supposons d'abord $a > R_2$. L'intégrale devient

$$\int_{R_1}^{R_2} [\psi(a + \rho) - \psi(a - \rho)] \frac{\partial d\rho}{a}$$

ou bien

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} [\psi(a + R_2) - \psi(a + R_1)] - \chi(a + R_2) + \chi(a + R_1) \\ & - \frac{1}{a} [\psi(a - R_2) - \psi(a - R_1)] + \chi(a - R_2) - \chi(a - R_1). \end{aligned}$$

On devra donc avoir l'équation

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} [\psi(a + R_2) - \psi(a + R_1)] - \chi(a + R_2) + \chi(a + R_1) \\ & - \frac{1}{a} [\psi(a - R_2) - \psi(a - R_1)] + \chi(a - R_2) - \chi(a - R_1) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{M}{a} + N \right). \end{aligned}$$

Multiplions par a et dérivons par rapport à a , il vient

$$\begin{aligned} & R_2[\chi'(a + R_2) + \chi'(a - R_2)] - \chi(a + R_2) + \chi(a - R_2) \\ & - R_1[\chi'(a + R_1) + \chi'(a - R_1)] + \chi(a + R_1) - \chi(a - R_1) = \frac{N}{2\pi}. \end{aligned}$$

En dérivant encore une fois par rapport à a , on obtient

$$(9) \quad \begin{cases} R_2[\chi''(a + R_2) + \chi''(a - R_2)] - \chi'(a + R_2) + \chi'(a - R_2) \\ = R_1[\chi''(a + R_1) + \chi''(a - R_1)] - \chi'(a + R_1) + \chi'(a - R_1). \end{cases}$$

Dérivons l'équation (9) par rapport à R_1 en considérant R_2 comme fonction de R_1 fournie par l'équation

$$R_2^3 - R_1^3 = R^3,$$

d'où

$$\frac{dR_2}{dR_1} = \frac{R_1^2}{R_2^2}.$$

On obtiendra

$$(10) \quad \frac{\chi'''(a + R_2) - \chi'''(a - R_2)}{R_2} = \frac{\chi'''(a + R_1) - \chi'''(a - R_1)}{R_1}.$$

Dérivons encore cette équation par rapport à R_1 , on a

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{R_2[\chi^{iv}(a + R_2) + \chi^{iv}(a - R_2)] - \chi'''(a + R_2) + \chi'''(a - R_2)}{R_2^{\frac{5}{2}}} \\ = \frac{R_1[\chi^{iv}(a + R_1) + \chi^{iv}(a - R_1)] - \chi'''(a + R_1) + \chi'''(a - R_1)}{R_1^{\frac{5}{2}}}. \end{array} \right.$$

En dérivant deux fois par rapport à a l'équation (9), on a

$$\begin{aligned} R_2[\chi^{iv}(a + R_2) + \chi^{iv}(a - R_2)] - \chi'''(a + R_2) + \chi'''(a - R_2) \\ = R_1[\chi^{iv}(a + R_1) + \chi^{iv}(a - R_1)] - \chi'''(a + R_1) + \chi'''(a - R_1). \end{aligned}$$

En comparant cette équation avec l'équation (11), on voit que l'on aura séparément

$$\begin{aligned} R_2[\chi^{iv}(a + R_2) + \chi^{iv}(a - R_2)] - \chi'''(a + R_2) + \chi'''(a - R_2) &= 0, \\ R_1[\chi^{iv}(a + R_1) + \chi^{iv}(a - R_1)] - \chi'''(a + R_1) + \chi'''(a - R_1) &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en somme,

$$(12) \quad r[\chi^{iv}(a + r) + \chi^{iv}(a - r)] - \chi'''(a + r) + \chi'''(a - r) = 0,$$

r étant plus petit que a .

En dérivant cette équation par rapport à r , on obtient

$$(13) \quad \chi^{iv}(a + r) + \chi^{iv}(a - r) = 0.$$

En dérivant cette équation successivement par rapport à r et à a , on obtient

$$\begin{aligned} \chi^{vi}(a + r) - \chi^{vi}(a - r) &= 0, \\ \chi^{vi}(a + r) + \chi^{vi}(a - r) &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \chi^{vi}(r) &= 0, \\ \chi^{vi}(r) &= \Lambda. \end{aligned}$$

A étant une constante. L'équation (13) donne $A = 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\chi^v(r) &= 0, \\ \chi^{iv}(r) &= B, \\ \chi^m(r) &= Br + C,\end{aligned}$$

B et C étant de nouvelles constantes. En portant ces valeurs dans l'équation (12), on voit qu'elle est identiquement satisfaite. On a alors

$$\begin{aligned}\chi''(r) &= \frac{B}{2} r^2 + Cr + D, \\ \chi'(r) &= \frac{B}{6} r^3 + \frac{C}{2} r^2 + Dr + E,\end{aligned}$$

D et E étant de nouvelles constantes. Portons ces valeurs dans l'équation (9). Elle devient

$$\begin{aligned}& R_2 \left[\frac{B}{2} (a + R_2)^2 + C(a + R_2) + D + \frac{B}{2} (a - R_2)^2 + C(a - R_2) + D \right] \\& - \frac{B}{6} (a + R_2)^3 - \frac{C}{2} (a + R_2)^2 - D(a + R_2) - E \\& + \frac{B}{6} (a - R_2)^3 + \frac{C}{2} (a - R_2)^2 + D(a - R_2) + E \\& = R_1 \left[\frac{B}{2} (a + R_1)^2 + C(a + R_1) + D + \frac{B}{2} (a - R_1)^2 + C(a - R_1) + D \right] \\& - \frac{B}{6} (a + R_1)^3 - \frac{C}{2} (a + R_1)^2 - D(a + R_1) - E \\& + \frac{B}{6} (a - R_1)^3 + \frac{C}{2} (a - R_1)^2 + D(a - R_1) + E,\end{aligned}$$

ou, après simplifications,

$$\frac{2}{3} B(R_2^3 - R_1^3) = \frac{2}{3} BR^3 = 0,$$

d'où l'on déduit $B = 0$.

On a donc

$$\chi''(r) = Cr + D,$$

d'où

$$f(r) = C + \frac{D}{r},$$

et, par suite,

$$V(r) = \frac{D}{r^2}.$$

On trouve l'attraction en raison inverse du carré de la distance comme seule solution.

Supposons maintenant que l'on ait $a < R_1$. Reprenons les calculs. L'intégrale double devient

$$\int_{R_1}^{R_2} [\varphi(a + \varrho) - \varphi(\varrho - a)] \frac{\varphi d\varrho}{a},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} [\psi(a + R_2) - \psi(a + R_1)] - \chi(a + R_2) + \chi(a + R_1) \\ & - \frac{1}{a} [\psi(R_2 - a) - \psi(R_1 - a)] - \chi(R_2 - a) + \chi(R_1 - a). \end{aligned}$$

On a donc l'équation

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} [\psi(a + R_2) - \psi(a + R_1)] - \chi(a + R_2) + \chi(a + R_1) \\ & - \frac{1}{a} [\psi(R_2 - a) - \psi(R_1 - a)] - \chi(R_2 - a) + \chi(R_1 - a) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{M}{a} + N \right). \end{aligned}$$

Multiplions les deux membres par a et dérivons par rapport à a , il vient

$$\begin{aligned} & R_2 [\chi'(R_2 + a) + \chi'(R_2 - a)] - \chi(a + R_2) - \chi(R_2 - a) \\ & - R_1 [\chi'(R_1 + a) + \chi'(R_1 - a)] + \chi(a + R_1) + \chi(R_1 - a) = \frac{N}{2\pi}. \end{aligned}$$

Dérivons encore une fois par rapport à a , on obtient

$$(14) \quad \begin{cases} R_2 [\chi''(R_2 + a) - \chi''(R_2 - a)] - \chi'(R_2 + a) + \chi'(R_2 - a) \\ = R_1 [\chi''(R_1 + a) - \chi''(R_1 - a)] - \chi'(R_1 + a) + \chi'(R_1 - a). \end{cases}$$

Dérivons cette équation par rapport à R_1 en considérant R_2 comme fonction de R_1 , de même que l'on a fait précédemment. On obtient

$$(15) \quad \frac{\chi'''(R_2 - a) - \chi'''(R_2 + a)}{R_2} = \frac{\chi'''(R_1 + a) - \chi'''(R_1 - a)}{R_1}.$$

Dérivons encore cette équation par rapport à R_1 , on a

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{R_2 [\chi^{IV}(R_2 + a) - \chi^{IV}(R_2 - a)] - \chi''''(R_2 + a) + \chi''''(R_2 - a)}{R_2^2} \\ = \frac{R_1 [\chi^{IV}(R_1 + a) - \chi^{IV}(R_1 - a)] - \chi''''(R_1 + a) + \chi''''(R_1 - a)}{R_1^2}. \end{cases}$$

Dérivons deux fois l'équation (14) par rapport à a , il vient

$$\begin{aligned} R_2[\chi^{iv}(R_2+a) - \chi^{iv}(R_2-a)] - \chi'''(R_2+a) + \chi'''(R_2-a) \\ = R_1[\chi^{iv}(R_1+a) - \chi^{iv}(R_1-a)] - \chi'''(R_1+a) + \chi'''(R_1-a). \end{aligned}$$

En comparant cette équation à l'équation (16) on en déduit que l'on a séparément

$$\begin{aligned} R_2[\chi^{iv}(R_2+a) - \chi^{iv}(R_2-a)] - \chi'''(R_2+a) + \chi'''(R_2-a) = 0, \\ R_1[\chi^{iv}(R_1+a) - \chi^{iv}(R_1-a)] - \chi'''(R_1+a) + \chi'''(R_1-a) = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(17) \quad r[\chi^{iv}(r+a) - \chi^{iv}(r-a)] - \chi'''(r+a) + \chi'''(r-a) = 0,$$

r étant supérieur à a . Dérivons cette équation par rapport à r , on a

$$\chi^v(r+a) - \chi^v(r-a) = 0,$$

on en tire

$$\begin{aligned} \chi^{vi}(r) &= 0, \\ \chi^v(r) &= A, \\ \chi^{iv}(r) &= A r + B, \\ \chi'''(r) &= \frac{A}{2} r^2 + B r + C, \end{aligned}$$

A, B, C étant des constantes. En substituant ces valeurs dans l'équation (17), on a

$$\begin{aligned} r[A(r+a) + B - A(r-a) - B] - \frac{A}{2}(r+a)^2 - B(r+a) - C \\ + \frac{A}{2}(r-a)^2 + B(r-a) + C = 0, \end{aligned}$$

ou bien

$$-2Ba = 0,$$

d'où

$$B = 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \chi'''(r) &= \frac{A}{2} r^2 + C, \\ \chi''(r) &= \frac{A}{6} r^3 + C r + D, \\ \chi'(r) &= \frac{A}{24} r^4 + \frac{C}{2} r^2 + D r + E, \end{aligned}$$

D et E étant de nouvelles constantes. En substituant ces valeurs

dans l'équation (14), on a

$$\begin{aligned} & R_2 \left[\frac{A}{6} (R_2 + a)^3 + C(R_2 + a) + D - \frac{A}{6} (R_2 - a)^3 - C(R_2 - a) - D \right] \\ & - \frac{A}{24} (R_2 + a)^4 - \frac{C}{2} (R_2 + a)^2 - D(R_2 + a) - E \\ & + \frac{A}{24} (R_2 - a)^4 + \frac{C}{2} (R_2 - a)^2 + D(R_2 - a) + E \\ & = R_1 \left[\frac{A}{6} (R_1 + a)^3 + C(R_1 + a) + D - \frac{A}{6} (R_1 - a)^3 - C(R_1 - a) - D \right] \\ & - \frac{A}{24} (R_1 + a)^4 - \frac{C}{2} (R_1 + a)^2 - D(R_1 + a) - E \\ & + \frac{A}{24} (R_1 - a)^4 + \frac{C}{2} (R_1 - a)^2 + D(R_1 - a) + E, \end{aligned}$$

ou, en simplifiant,

$$\frac{2A}{3} R_2^3 a = \frac{2A}{3} R_1^3 a$$

ou

$$\frac{2A}{3} R^3 a = 0,$$

d'où

$$A = 0;$$

on a donc

$$Z''(r) = Cr + D,$$

d'où

$$f(r) = C + \frac{D}{r}$$

et

$$F(r) = \frac{D}{r^2}.$$

On n'a d'autre loi d'attraction que celle de Newton. Ainsi, un point matériel d'une espèce de matière en repos attire, suivant la loi de Newton, un point matériel d'une autre espèce de matière également en repos.

4. Nous allons maintenant nous occuper de l'action de deux points matériels en mouvement l'un sur l'autre.

Soient deux points matériels infiniment petits quelconques M et M', *dv* le volume infiniment petit de M, *dv'* le volume infiniment petit de M'. Il est clair que, si l'on représente par (F) *dv dv'* la force provenant de l'action de M' sur M, le segment (F) forme avec le segment MM' et les segments représentant les vitesses des points M et M' un système invariable. J'admettrai que ce segment

(F) forme, avec MM' et le segment MN représentant la vitesse relative de M par rapport à M' , un système invariable. Soit alors MI une perpendiculaire à MM' dans le plan NMM' . Le segment (F) sera situé dans le plan NMM' , et si l'on désigne par a_1 et b_1 les projections de MN sur MM' et MI , par r la distance MM' , ses projections sur MM' et MI seront des fonctions de a_1 , b_1 , r que nous désignerons par

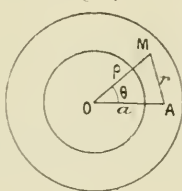
$$f(a_1, b_1, r).$$

$$z(a_1, b_1, r).$$

Cela posé, revenons à l'action d'une portion de matière comprise entre deux sphères concentriques sur un de ses points A . Reprenons les notations adoptées (*fig. 4*).

Nous avons vu que la vitesse d'un point quelconque M était

Fig. 4.



placée sur OM et y avait pour projection $\frac{C}{\rho^2}$, ρ désignant la distance OM , C étant une fonction du temps. L'accélération du point A est placée suivant OA et y a pour projection

$$\frac{dC}{dt} \frac{1}{a^2} - 2 \frac{C^2}{a^3}.$$

Pour avoir la force provenant de l'action de la matière sur A il faut multiplier cette accélération par $\rho_1 dv$, ρ_1 étant la densité de la matière et dv le volume infiniment petit du point matériel A . Les quantités a_1 et b_1 contiennent C en facteur. Donc on voit que, pour trouver le terme

$$- \frac{2C^2}{a^3} \rho_1 dv,$$

il faut prendre dans

$$f(a_1, b_1, r).$$

$$z(a_1, b_1, r),$$

des fonctions homogènes du second degré en a_1 et b_1 .

Admettons maintenant que les fonctions f et φ soient développables en séries suivant les puissances de a_1 et b_1 , on voit que ces fonctions devront être de la forme

$$\begin{aligned} a_1^2 f(r) + b_1^2 \varphi(r) + a_1 b_1 \psi(r), \\ a_1^2 f_1(r) + b_1^2 \varphi_1(r) + a_1 b_1 \psi(r). \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que si l'on change b_1 de signe, a_1 restant le même, la fonction $f(a_1, b_1, r)$ ne doit pas changer, tandis que la fonction $\varphi(a_1, b_1, r)$ doit changer seulement de signe. On aura donc

$$\psi_1(r) = 0, \quad f_1(r) = 0, \quad \varphi_1(r) = 0.$$

Les termes obtenus dans l'intégration, qui donnent l'action de la portion de matière sur le point A en prenant les fonctions

$$\begin{aligned} a_1^2 f(r) + b_1^2 \varphi(r), \\ a_1 b_1 \psi(r), \end{aligned}$$

donnent des termes en C^2 , qui ne peuvent par conséquent se réduire qu'entre eux, et par suite on devra avoir

$$\iiint \{ [a_1^2 f(r) + b_1^2 \varphi(r)] \cos \Lambda + a_1 b_1 \psi(r) \sin \Lambda \} dv' = -\frac{2 C^2 \rho_1}{a^3} + \frac{\Phi(R_1)}{a^2}.$$

Nous allons développer cette intégrale.

Soit θ l'angle MOA. Soient α l'angle de la vitesse relative de A par rapport à M avec AM, V la grandeur de cette vitesse relative. On trouve sans peine

$$a_1 = V \cos \alpha = \frac{C}{2 a^3 \rho^3 r} [r^2 (a^3 - \rho^3) - (a^2 - \rho^2)(a^3 - \rho^3)],$$

$$V^2 = \frac{C^2}{a^4 \rho^4} [r^2 a \rho + (a^3 - \rho^3)(a - \rho)],$$

$$V^2 \sin^2 \alpha = \frac{C^2}{4 a^6 \rho^6 r^2} (a^3 - \rho^3)^2 [-r^4 + 2 r^2 (a^2 + \rho^2) - (a^2 - \rho^2)^2],$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2 a \rho} \sqrt{-r^4 + 2 r^2 (a^2 + \rho^2) - (a^2 - \rho^2)^2},$$

$$b_1 = V \sin \alpha = \frac{C}{a^2 \rho^2 r} (a^3 - \rho^3) \sin \theta.$$

$$\cos \Lambda = \frac{r^2 + a^2 - \rho^2}{2 a r}, \quad \sin \Lambda = \frac{\rho \sin \theta}{r}.$$

et, par suite,

$$a_1^2 f(r) \cos A \, dv' = \frac{C^2}{8a^8 \rho^5 r^2} [r^2(a^3 + \rho^3) - (a^2 - \rho^2)(a^3 - \rho^3)]^2 \\ \times (r^2 + a^2 - \rho^2) f(r) \, d\rho \, dr \, d\psi,$$

$$b_1^2 \varphi(r) \cos A \, dv' = \frac{C^2}{8a^8 \rho^5 r^2} [-r^4 + 2r^2(a^2 + \rho^2) - (a^2 - \rho^2)^2](a^3 - \rho^3)^2 \\ \times (r^2 + a^2 - \rho^2) \varphi(r) \, d\rho \, dr \, d\psi,$$

$$a_1 b_1 \psi(r) \sin A \, dv' = \frac{C^2}{8a^8 \rho^5 r^2} [-r^4 + 2r^2(a^2 + \rho^2) - (a^2 - \rho^2)^2](a^3 - \rho^3) \\ \times [r^2(a^3 + \rho^3) - (a^2 - \rho^2)(a^3 - \rho^3)] \psi(r) \, d\rho \, dr \, d\psi,$$

d'où il suit que l'on devra avoir

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int \int [r^2(a^3 + \rho^3) - (a^2 - \rho^2)(a^3 - \rho^3)]^2 \\ & \quad \times (r^2 + a^2 - \rho^2) f_1(r) + (a^3 - \rho^3)^2 \\ & \quad \times [-r^4 + 2r^2(a^2 + \rho^2) - (a^2 - \rho^2)^2] \\ & \quad \times (r^2 + a^2 - \rho^2) \varphi_1(r) - (a^3 - \rho^3) \\ & \quad \times [-r^4 + 2r^2(a^2 + \rho^2) - (a^2 - \rho^2)^2] \\ & \quad \times [r^2(a^3 + \rho^3) - (a^2 - \rho^2)(a^3 - \rho^3)] \psi_1(r) \} \frac{d\rho \, dr}{\rho^5} \\ & = a^3 + a^6 F(R_1), \end{aligned} \right.$$

en posant

$$f_1(r) = -\frac{\pi}{8\rho_1 r^2} f(r),$$

$$\varphi_1(r) = -\frac{\pi}{8\rho_1 r^2} \varphi(r),$$

$$\psi_1(r) = -\frac{\pi}{8\rho_1 r^2} \psi(r),$$

$$F(R_1) = -\frac{1}{2C^2 \rho_1} \Phi(R_1).$$

Dérivons l'équation (18) par rapport à R_1 en tenant compte de l'équation

$$\frac{dR_2}{dR_1} = \frac{R_1^2}{R_2^2},$$

il vient

$$\begin{aligned}
 &= \int_{a-R_1}^{a+R_1} \left\{ \left[r^2 (a^3 + R_1^3) - (a^2 - R_1^2)(a^3 - R_1^3) \right] \right. \\
 &\quad \times (r^2 + a^2 - R_1^2) f_1(r) + (a^3 - R_1^3)^2 \\
 &\quad \times [-r^4 + 2r^2(a^2 + R_1^2) - (a^2 - R_1^2)^2] \\
 &\quad \times (r^2 + a^2 - R_1^2) \varphi_1(r) + (a^3 - R_1^3) \\
 &\quad \times [-r^4 + 2r^2(a^2 + R_1^2) - (a^2 - R_1^2)^2] \\
 &\quad \times \left[r^2 (a^3 + R_1^3) - (a^2 - R_1^2)(a^3 - R_1^3) \right] \left. \right\} \psi_1(r) \left\{ \frac{dr}{R_1^3} \right. \\
 &+ \frac{R_1^2}{R_2^2} \int_{R_2-a}^{R_2+a} \left\{ \left[r^2 (a^3 + R_2^3) - (a^2 - R_2^2)(a^3 - R_2^3) \right] \right. \\
 &\quad \times (r^2 + a^2 - R_2^2) f_1(r) + (a^3 - R_2^3)^2 \\
 &\quad \times [-r^4 + 2r^2(a^2 + R_2^2) - (a^2 - R_2^2)^2] \\
 &\quad \times (r^2 + a^2 - R_2^2) \varphi_1(r) + (a^3 - R_2^3) \\
 &\quad \times [-r^4 + 2r^2(a^2 + R_2^2) - (a^2 - R_2^2)^2] \\
 &\quad \times \left. \left[r^2 (a^3 + R_2^3) - (a^2 - R_2^2)(a^3 - R_2^3) \right] \right\} \psi_2(r) \left\{ \frac{dr}{R_2^3} \right. \\
 &= a^6 F'(R_1).
 \end{aligned}$$

Multiplions les deux membres de cette équation par R_1^5 . Alors dans le premier membre, supposé ordonné suivant les puissances de R_1 , les termes jusqu'au sixième degré ne peuvent provenir que de la première intégrale et par suite seront égaux aux produits de a^6 par des constantes. Nous allons les calculer.

Dans la première intégrale, la quantité comprise entre les premières parenthèses $\{ \}$ doit être développée suivant les puissances de R_1 jusqu'à la cinquième. On obtient ainsi comme coefficient de $f_1(r)$ l'expression

$$\begin{aligned}
 &a^6 (r^2 - a^2)^2 (r^2 + a^2) + a^6 [2(r^4 - a^4) - (r^2 - a^2)^2] R_1^2 \\
 &+ 2a^3 (r^4 - a^4) (r^2 - a^2) R_1^3 + a^6 [r^2 + a^2 - 2(r^2 - a^2)] R_1^4 \\
 &+ [4a^5 (r^2 - a^2) - 2a^3 (r^4 - a^4)] R_1^5.
 \end{aligned}$$

Le coefficient de $\varphi_1(r)$ sera

$$\begin{aligned}
 &-a^6 (r^2 - a^2) (r^2 - a^2)^2 - a^6 [(r^2 - a^2)^2 + 2(r^2 + a^2)^2] R_1^2 \\
 &+ 2a^3 (r^2 - a^2)^2 (r^2 + a^2) R_1^3 - 3a^6 (r^2 + a^2) R_1^4 \\
 &+ a^3 [(r^2 - a^2)^2 - 2(r^2 + a^2)^2] R_1^5.
 \end{aligned}$$

Le coefficient de $\psi_1(r)$ sera

$$\begin{aligned}
 &-a^6 (r^2 - a^2)^3 - a^6 [2(r^4 - a^4) - (r^2 - a^2)^2] R_1^2 - 2a^5 (r^2 - a^2)^2 R_1^3 \\
 &+ a^6 [2(r^2 - a^2) - (r^2 - a^2)] R_1^4 + [2a^3 (r^2 - a^2)^2 + 4a^5 (r^2 - a^2)] R_1^5.
 \end{aligned}$$

On a ensuite les formules

$$\begin{aligned} \int_{a-R_1}^{a+R_1} r^6 f(r) dr &= 2 R_1 a^6 f(a) + \frac{R_1^3}{3} [30 a^4 f(a) + 12 a^5 f'(a) + a^6 f''(a)] \\ &\quad + \frac{R_1^5}{60} [360 a^2 f(a) + 480 a^3 f'(a) + 180 a^4 f''(a) + 24 a^5 f'''(a) + a^6 f^{IV}(a)], \\ \int_{a-R_1}^{a+R_1} r^4 f(r) dr &= 2 R_1 a^4 f(a) + \frac{R_1^3}{3} [12 a^2 f(a) + 8 a^3 f'(a) + a^4 f''(a)] \\ &\quad + \frac{R_1^5}{60} [24 f(a) + 96 a f'(a) + 72 a^2 f''(a) + 16 a^3 f'''(a) + a^4 f^{IV}(a)], \\ \int_{a-R_1}^{a+R_1} r^2 f(r) dr &= 2 R_1 a^2 f(a) + \frac{R_1^3}{3} [2 f(a) + 4 a f'(a) + a^2 f''(a)] \\ &\quad + \frac{R_1^5}{60} [12 f''(a) + 8 a f'''(a) + a^2 f^{IV}(a)], \\ \int_{a-R_1}^{a+R_1} f(r) dr &= 2 R_1 f(a) + \frac{R_1^3}{3} f''(a) + \frac{R_1^5}{60} f^{IV}(a). \end{aligned}$$

En se servant de ces formules, on aura

$$\begin{aligned} \int_{a-R_1}^{a+R_1} a^6 (r^2 - a^2)^2 (r^2 + a^2) f_1(r) dr &= \frac{16}{3} a^{10} f_1(a) R_1^3 \\ &\quad + \frac{1}{5} a^8 R_1^5 [28 f_1(a) + 32 a f_1'(a) + 8 a^2 f_1''(a)], \\ \int_{a-R_1}^{a+R_1} a^6 R_1^3 [2(r^4 - a^4) - (r^2 - a^2)^2] f_1(r) dr &= \frac{16}{3} a^8 R_1^5 [f_1(a) + a f_1'(a)], \\ \int_{a-R_1}^{a+R_1} 2 a^3 R_1^3 (r^4 - a^4) (r^2 + a^2) f_1(r) dr &= \frac{16}{3} a^7 R_1^5 [5 f_1(a) + 2 a f_1'(a)], \\ \int_{a-R_1}^{a+R_1} R_1^4 a^6 [r^2 + a^2 - 2(r^2 - a^2)] f_1(r) dr &= 4 a^8 R_1^5 f_1(a), \\ \int_{a-R_1}^{a+R_1} R_1^4 [4 a^5 (r^2 + a^2) - 2 a^3 (r^4 - a^4)] f_1(r) dr &= 16 a^7 R_1^6 f_1(a), \\ \int_{a-R_1}^{a+R_1} -a^6 (r^2 - a^2)^2 (r^2 + a^2) \varphi_1(r) dr &= -\frac{16}{3} a^{10} \varphi_1(a) R_1^3 \\ &\quad - \frac{1}{5} a^8 R_1^5 [28 \varphi_1(a) + 32 a \varphi_1'(a) + 8 a^2 \varphi_1''(a)], \\ \int_{a-R_1}^{a+R_1} R_1^4 a^6 [2(r^2 + a^2)^2 + (r^2 - a^2)^2] \varphi_1(r) dr &= 16 a^{10} R_1^3 \varphi_1(a) \\ &\quad + \frac{8}{3} a^8 R_1^5 [5 \varphi_1(a) + 4 a \varphi_1'(a) + a^2 \varphi_1''(a)], \\ \int_{a-R_1}^{a+R_1} 2 a^3 R_1^3 (r^2 - a^2)^2 (r^2 + a^2) \varphi_1(r) dr &= \frac{32}{3} a^7 R_1^5 \varphi_1(a), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{a-R_1}^{a+R_2} -3a^6 R_1^4 (r^2 + a^2) \varphi_1(r) dr &= -12a^8 R_1^5 \varphi_1(a), \\ \int_{a-R_1}^{a+R_1} -2a^3 [2(r^2 + a^2)^2 + (r^2 - a^2)^2] \varphi_1(r) dr &= -32a^7 R_1^6 \varphi_1(a), \\ \int_{a-R_1}^{a+R_1} -a^6 (r^2 - a^2)^3 \psi_1(r) dr &= -\frac{8}{5} a^8 R_1^5 [3\psi_1(a) + 2a\psi_1'(a)], \\ \int_{a-R_1}^{a+R_1} a^6 [2(r^2 - a^2) - (r^2 - a^2)^2] R_1^2 \psi_1(r) dr &= \frac{16}{3} a^8 R_1^5 [\psi_1(a) + a\psi_1'(a)], \\ \int_{a-R_1}^{a+R_1} -2a^5 (r^2 - a^2)^2 R_1^3 \psi_1(r) dr &= -\frac{16}{3} a^7 R_1^6 \psi_1(a), \\ \int_{a-R_1}^{a+R_1} a^6 [2(r^2 + a^2) - (r^2 - a^2)] R_1^4 \psi_1(r) dr &= 8 R_1^5 a^8 \psi_1(a), \\ \int_{a-R_1}^{a+R_1} [2a^3 (r^2 - a^2)^2 + 4a^5 (r^2 + a^2)] R_1^5 \psi_1(r) dr &= 16a^7 R_1^6 \psi_1(a). \end{aligned}$$

On en déduit les équations

$$\begin{aligned} f_1 + 2\varphi_1 &= \frac{A}{a^4}, \\ if_1 + af_1' - 2\varphi_1 + \psi_1 &= \frac{B}{a}, \\ 28f_1 + 22af_1' + 3a^2f_1'' + 2[-4\varphi_1 + 4a\varphi_1' + a^2\varphi_1''] &= 4[4\psi_1 + a\psi_1'] = \frac{C}{a^2}. \end{aligned}$$

A, B, C étant des constantes. On en tire

$$a^2f_1' + 11af_1' + 2if_1 = 6\frac{B}{a} - \frac{C}{2a^2}.$$

Cette équation peut s'écrire, d'après

$$\frac{d}{da} [a^5f_1'(a) + 6a^4f_1(a)] = a^5f_1''(a) + 11a^4f_1'(a) + 2ia^3f_1(a),$$

de la manière suivante :

$$6Ba^2 - \frac{C}{2}a = \frac{d}{da} [a^5f_1'(a) + 6a^4f_1(a)],$$

d'où

$$a^5f_1'(a) + 6a^4f_1(a) = 2Ba^3 - \frac{C}{4}a^2 + D,$$

D étant une nouvelle constante. On a ensuite

$$\frac{d}{da} [a^6 f_1(a)] = a^6 f'_1(a) + 6a^5 f_1(a) = 2B a^4 - \frac{C}{4} a^3 + D a,$$

d'où

$$a^6 f_1(a) = \frac{2B}{5} a^5 - \frac{C}{16} a^4 + \frac{D a^2}{2} + E$$

et

$$f_1(a) = \frac{2B}{5} \frac{1}{a} - \frac{C}{16} \frac{1}{a^2} + \frac{D}{2} \frac{1}{a^4} + \frac{E}{a^6},$$

E étant une nouvelle constante. On a ensuite

$$\varphi_1(a) = \frac{A}{2a^3} - \frac{B}{5} \frac{1}{a} + \frac{C}{32} \frac{1}{a^2} - \frac{D}{4} \frac{1}{a^4} - \frac{E}{2} \frac{1}{a^6},$$

$$\psi_1(a) = \frac{A}{a^3} - \frac{3B}{5} \frac{1}{a} + \frac{3C}{16} \frac{1}{a^2} - \frac{D}{2} \frac{1}{a^4} + \frac{E}{a^6}.$$

Il faut porter les valeurs de $f_1(r)$, $\varphi_1(r)$, $\psi_1(r)$ dans l'équation (18) et voir si l'on peut disposer des constantes A, B, C, D, E pour y satisfaire.

Prenons d'abord dans $f_1(r)$, $\varphi_1(r)$, $\psi_1(r)$ les termes en E.

Je calculerai dans l'équation (18) le terme en $\frac{E}{2}$.

Il faut alors y faire

$$f_1(r) = \frac{2}{r^6},$$

$$\varphi_1(r) = -\frac{1}{r^6},$$

$$\psi_1(r) = \frac{2}{r^6}.$$

On a

$$(19) \left\{ \begin{aligned} & [r^2(a^3 + \rho^3) - (a^2 - \rho^2)(a^3 - \rho^3)]^2 (r^2 + a^2 - \rho^2) = r^6(a^3 + \rho^3)^2 \\ & + r^4(a^2 - \rho^2)(a^3 + \rho^3)^2 - 2r^4(a^2 - \rho^2)(a^3 - \rho^3)(a^3 + \rho^3) \\ & + r^2(a^3 - \rho^3)^2(a^3 - \rho^3)^2 - 2r^2(a^2 - \rho^2)^2(a^3 - \rho^3)(a^3 + \rho^3) \\ & + (a^2 - \rho^2)^3(a^3 - \rho^3)^2. \end{aligned} \right.$$

De même

$$(19 \text{ bis}) \left\{ \begin{aligned} & (a^3 - \rho^3)^2 [-r^4 + 2r^2(a^2 + \rho^2) - (a^2 - \rho^2)^2] (a^2 - \rho^2 + r^2) \\ & = -r^6(a^3 - \rho^3)^2 + 2r^4(a^2 + \rho^2)(a^3 - \rho^3)^2 - r^4(a^2 - \rho^2)(a^3 - \rho^3)^2 \\ & + 2r^2(a^2 + \rho^2)(a^2 - \rho^2)(a^3 - \rho^3)^2 - r^2(a^2 - \rho^2)^2(a^3 - \rho^3)^2 \\ & = (a^2 - \rho^2)^3(a^3 - \rho^3)^2. \end{aligned} \right.$$

et

$$(19^{ter}) \left\{ \begin{aligned} & (a^3 - \rho^3)[-r^4 + 2r^2(a^2 + \rho^2) - (a^2 - \rho^2)^2][r^2(a^3 + \rho^3) - (a^2 - \rho^2)(a^3 - \rho^3)] \\ & = -r^6(a^3 + \rho^3)(a^3 - \rho^3) + 2r^4(a^2 + \rho^2)(a^3 + \rho^3)(a^3 - \rho^3) \\ & \quad + r^4(a^2 - \rho^2)(a^3 - \rho^3)^2 - r^2(a^3 + \rho^3)(a^3 - \rho^3)(a^2 - \rho^2)^2 \\ & \quad - 2r^2(a^2 + \rho^2)(a^2 - \rho^2)(a^3 - \rho^3)^2 + (a^2 - \rho^2)^3(a^3 - \rho^3)^2. \end{aligned} \right.$$

Désignons par u_1 , u_2 , u_3 les premiers membres des équations (19). Il faut évaluer

$$\iint \frac{2u_1 - u_2 + 2u_3}{r^6} \frac{d\rho dr}{\rho^5},$$

J'évaluerai donc d'abord

$$\int_{a-\rho}^{a+\rho} \frac{2u_1 - u_2 + 2u_3}{r^6} dr, \quad \int_{\rho-a}^{\rho+a} \frac{2u_1 - u_2 + 2u_3}{r^6} dr.$$

Je prendrai pour fonction de r ayant pour dérivée par rapport à r l'expression

$$\frac{2u_1 - u_2 + 2u_3}{r^6},$$

la fonction suivante $F(r)$:

$$\begin{aligned} F(r) &= 2(a^3 + \rho^3)^2 r - \frac{2}{r}(a^2 - \rho^2)(a^3 + \rho^3)^2 + \frac{4}{r}(a^2 - \rho^2)(a^3 - \rho^3)(a^3 + \rho^3) \\ &\quad - \frac{2}{3r^3}(a^2 - \rho^2)^2(a^3 - \rho^3)^2 + \frac{4}{3r^3}(a^2 - \rho^2)^2(a^3 - \rho^3)(a^3 + \rho^3) \\ &\quad - \frac{2}{5r^5}(a^2 - \rho^2)^3(a^3 - \rho^3)^2 + (a^3 - \rho^3)^2 r + \frac{2}{r}(a^2 + \rho^2)(a^3 - \rho^3)^2 \\ &\quad - \frac{1}{r}(a^2 - \rho^2)(a^3 - \rho^3)^2 + \frac{2}{3r^3}(a^2 + \rho^2)(a^2 - \rho^2)(a^3 - \rho^3)^2 \\ &\quad - \frac{1}{3r^3}(a^2 - \rho^2)^2(a^3 - \rho^3)^2 - \frac{1}{5r^5}(a^2 - \rho^2)^3(a^3 - \rho^3)^2 \\ &\quad - 2(a^3 + \rho^3)(a^3 - \rho^3)r - \frac{4}{r}(a^2 + \rho^2)(a^3 + \rho^3)(a^3 - \rho^3) \\ &\quad - \frac{2}{r}(a^2 - \rho^2)(a^3 - \rho^3)^2 + \frac{2}{3r^3}(a^3 - \rho^3)(a^3 - \rho^3)(a^2 - \rho^2)^2 \\ &\quad - \frac{4}{3r^3}(a^2 + \rho^2)(a^2 - \rho^2)(a^3 - \rho^3)^2 - \frac{2}{5r^5}(a^2 - \rho^2)^4(a^3 - \rho^3)^2. \end{aligned}$$

On en tire

$$\begin{aligned} F(a+\rho) = & 2(a^3+\rho^3)^2(a+\rho) - 2(a-\rho)(a^3+\rho^3)^2 \\ & + 4(a-\rho)(a^3-\rho^3)(a^3+\rho^3) - \frac{2}{3}(a-\rho)^2(a^3-\rho^3)^2 \frac{1}{a+\rho} \\ & + \frac{4}{3}(a-\rho)^2(a^3-\rho^3)(a^2-a\rho+\rho^2) - \frac{2}{5}(a-\rho)^3(a^3-\rho^3)^2 \frac{1}{(a+\rho)^2} \\ & + (a^3-\rho^3)^2(a+\rho) + 2(a^2+\rho^2)(a^3-\rho^3)^2 \frac{1}{a+\rho} - (a-\rho)(a^3-\rho^3)^2 \\ & + \frac{2}{3}(a^2+\rho^2)(a-\rho)(a^3-\rho^3)^2 \frac{1}{(a+\rho)^2} - \frac{1}{3}(a-\rho)^2(a^3-\rho^3)^2 \frac{1}{a+\rho} \\ & - \frac{1}{5}(a-\rho)^3(a^3-\rho^3)^2 \frac{1}{(a+\rho)^2} - 2(a^3+\rho^3)(a^3-\rho^3)(a+\rho) \\ & - 4(a^2+\rho^2)(a^3-\rho^3)(a^2-a\rho+\rho^2) - 2(a-\rho)(a^3-\rho^3)^2 \\ & + \frac{2}{3}(a^2-a\rho+\rho^2)(a^3-\rho^3)(a-\rho)^2 + \frac{4}{3}(a^2+\rho^2)(a-\rho)(a^3-\rho^3) \frac{1}{(a+\rho)^2} \\ & - \frac{2}{5}(a-\rho)^3(a^3-\rho^3)^2 \frac{1}{(a+\rho)^2}. \end{aligned}$$

Si l'on réunit les termes en $\frac{1}{(a+\rho)^2}$, on trouve qu'ils se réduisent à

$$(a^3-\rho^3)^2(a-\rho).$$

Si l'on réunit les termes en $\frac{1}{a+\rho}$, on trouve qu'ils se réduisent à

$$(a^3-\rho^3)^2(a+\rho).$$

On a donc

$$\begin{aligned} F(a+\rho) = & 2a(a^3-\rho^3)^2 + 4\rho(a^3+\rho^3)^2 + 4(a-\rho)(a^3-\rho^3)(a^3+\rho^3) \\ & + \frac{4}{3}(a-\rho)^2(a^3-\rho^3)(a^2-a\rho+\rho^2) + 2\rho(a^3-\rho^3)^2 \\ & - 2(a^3+\rho^3)(a^3-\rho^3)(a+\rho) - 4(a^2+\rho^2)(a^3-\rho^3)(a^2-a\rho+\rho^2) \\ & - 2(a-\rho)(a^3-\rho^3)^2 + \frac{2}{3}(a^2-a\rho+\rho^2)(a^3-\rho^3)(a-\rho)^2, \end{aligned}$$

ou bien

$$F(a+\rho) = 4\rho(a^3-\rho^3)^2 + 4\rho(a^3+\rho^3)^2 - 8\rho(a^3-\rho^3)(a^3+\rho^3) = 16\rho^7.$$

On trouvera de même

$$\begin{aligned} F(a-\rho) = & 2(a^3+\rho^3)^2(a-\rho) - 2(a+\rho)(a^3+\rho^3)^2 + 4(a+\rho)(a^3-\rho^3)(a^3+\rho^3) \\ & - \frac{2}{3}(a+\rho)^2(a^3-\rho^3)(a^2+a\rho+\rho^2) + \frac{4}{3}(a+\rho)^2(a^2+a\rho+\rho^2)(a^3+\rho^3) \\ & - \frac{2}{5}(a+\rho)^3(a^2+a\rho+\rho^2)^2 + (a^3-\rho^3)^2(a-\rho) \\ & + 2(a^2+\rho^2)(a^3-\rho^3)(a^2+a\rho+\rho^2) - (a+\rho)(a^3-\rho^3)^2 \\ & + \frac{2}{3}(a^2+\rho^2)(a+\rho)(a^2+a\rho+\rho^2)^2 - \frac{1}{3}(a+\rho)^2(a^3-\rho^3)(a^2+a\rho+\rho^2) \\ & - \frac{1}{5}(a+\rho)^3(a^2+a\rho+\rho^2)^2 - 2(a^3+\rho^3)(a^3-\rho^3)(a-\rho) \\ & - 4(a^2+\rho^2)(a^3+\rho^3)(a^2+a\rho+\rho^2) - 2(a+\rho)(a^3-\rho^3)^2 \\ & + \frac{2}{3}(a^3+\rho^3)(a^2+a\rho+\rho^2)(a+\rho)^2 + \frac{4}{3}(a^2+\rho^2)(a+\rho)(a^2+a\rho+\rho^2)^2 \\ & - \frac{2}{5}(a+\rho)^3(a^2+a\rho+\rho^2)^2. \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} F(a - \rho) = & -4\rho(a^3 + \rho^3)^2 - (a + \rho)^3(a^2 + a\rho + \rho^2)^2 \\ & + 2(a^3 + \rho^2)(a + \rho)(a^2 + a\rho + \rho^2)^2 - (a + \rho)^2(a^3 - \rho^3)(a^2 + a\rho + \rho^2) \\ & + 2(a + \rho)^2(a^3 + \rho^3)(a^2 + a\rho + \rho^2) + 4(a - \rho)(a^3 - \rho^3)(a^3 + \rho^3) \\ & - 2\rho(a^3 - \rho^3)^2 + 2(a^2 + \rho^2)(a^3 - \rho^3)(a^2 + a\rho + \rho^2) \\ & - 2(a^3 + \rho^3)(a^3 - \rho^3)(a - \rho) - 4(a^2 + \rho^2)(a^3 + \rho^3)(a^2 + a\rho + \rho^2) \\ & - 2(a + \rho)(a^3 - \rho^3)^2, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} F(a - \rho) = & -4\rho(a^3 + \rho^3)^2 + (a + \rho)(a^3 - \rho^3)^2 + (a - \rho)(a^3 - \rho^3)^2 \\ & - 2(a - \rho)(a^3 + \rho^3)(a^3 - \rho^3) + 4(a + \rho)(a^3 - \rho^3)(a^3 + \rho^3) \\ & - 2\rho(a^3 - \rho^3)^2 - 2(a^3 + \rho^3)(a^3 - \rho^3)(a - \rho) - 2(a + \rho)(a^3 - \rho^3)^2 \\ = & -4\rho(a^3 + \rho^3)^2 - 4\rho(a^3 - \rho^3)^2 + 8\rho(a^3 + \rho^3)(a^3 - \rho^3) \\ = & -16\rho^7. \end{aligned}$$

Comme $F(r)$ est une fonction impaire de r , on aura

$$F(\rho - a) = 16\rho^7.$$

On a donc à évaluer

$$\int_{a_1}^a \frac{d\rho}{\rho^5} 32\rho^7 + \int_a^{R_1} \frac{d\rho}{\rho^5} \times 0 = \frac{32}{3}(a^3 - R_1^3),$$

et par conséquent dans le premier membre de l'équation (18) le terme en E est

$$(20) \quad \frac{16E}{3}(a^3 - R_1^3).$$

Pour avoir le coefficient de B, il faut d'abord évaluer l'intégrale

$$\int_{a-\rho}^{a+\rho} \frac{2u_1 - u_2 - 3u_3}{5r} dr = F_1(a, \rho).$$

On voit aisément que l'intégrale où la limite inférieure $a - \rho$ est changée en $\rho - a$ est la même, car la fonction sous le signe somme donne comme intégrale indéfinie une fonction paire. On voit de plus que cette intégrale est une fonction entière de a et de ρ du douzième degré. Le terme en B étant

$$B \int_{a_1}^{R_1} F_1(a, \rho) \frac{d\rho}{\rho^5},$$

on aura le terme indépendant de α en prenant dans F_1 le terme en φ^{12} , ce qui fournit l'expression

$$(21) \quad B'(R_2^8 - R_1^8),$$

et l'on aura le terme en α^3 en prenant dans F_1 le terme en φ^9 , ce qui fournit l'expression

$$(22) \quad B''\alpha^3(R_2^5 - R_1^5).$$

Pour avoir le coefficient de C il faut évaluer les intégrales

$$\begin{aligned} \int_{a-\varphi}^{a+\varphi} \frac{2u_1 + u_2 + 6u_3}{32r^2} dr &= F_2(a, \varphi), \\ \int_{\varphi-a}^{\varphi+a} \frac{2u_1 + u_2 + 6u_3}{32r^2} dr &= \Phi_2(a, \varphi). \end{aligned}$$

On voit encore aisément que $F_2(a, \varphi)$ et $\Phi_2(a, \varphi)$ sont des fonctions entières de a et de φ du onzième degré. Le terme en C sera

$$C \int_{R_1}^a F_2(a, \varphi) \frac{d\varphi}{\varphi^3} + C \int_a^{R_2} \Phi_2(a, \varphi) \frac{d\varphi}{\varphi^3}.$$

On aura le terme indépendant de α en prenant dans $F_2(a, \varphi)$ et $\Phi_2(a, \varphi)$ les termes en φ^{11} , et l'on aura l'expression

$$(23) \quad C'R_1^7 + C''R_2^7.$$

Le terme en α^3 sera de même

$$(24) \quad C''' \alpha^3 R_1^4 + C^{IV} \alpha^3 R_2^4.$$

On verra de même que les termes en A et D fourniront comme terme indépendant l'expression

$$(25) \quad F'R_1^5 + F''R_2^5,$$

et comme terme en α^3 l'expression

$$(26) \quad F''' \alpha^3 R_1^2 + F^{IV} \alpha^3 R_2^2.$$

On devra donc avoir les deux équations

$$(27) \quad \begin{cases} -\frac{16E}{3} R_1^3 + B'(R_2^8 - R_1^8) + C'R_1^7 + C''R_2^7 + F'R_1^5 + F''R_2^5 = 0, \\ -\frac{16E}{3} + B''(R_2^5 - R_1^5) + C'''R_1^4 + C^{IV}R_2^4 + F'''R_1^2 + F^{IV}R_2^2 = 1. \end{cases}$$

les quantités $B', C', C'', F', F'', B'', C'', C''', F'''$, F''' étant des constantes. Remplaçons, dans ces équations, R_2 par sa valeur

$$R_2 = (R^3 + R_1^3)^{\frac{1}{3}}$$

et l'on aura les deux équations suivantes qui doivent être satisfaites quel que soit R_1 :

$$(28) \quad \begin{cases} -16 \frac{E}{3} R_1^3 + B' (R^3 + R_1^3)^{\frac{8}{3}} - B' R_1^8 + C' R_1^7 + C'' (R^3 + R_1^3)^{\frac{7}{3}} \\ \quad - F' R_1^5 + F'' (R^3 + R_1^3)^{\frac{5}{3}} = 0, \\ \frac{16E}{3} + B'' (R^3 + R_1^3)^{\frac{5}{3}} - B'' R_1^5 + C'' R_1^4 - C''' (R^3 + R_1^3)^{\frac{4}{3}} \\ \quad + F''' R_1^3 + F''' (R^3 + R_1^3)^{\frac{2}{3}} = 1. \end{cases}$$

Supposant $R_1 < R$ et développant en série les radicaux tels que, par exemple,

$$(R^3 + R_1^3)^{\frac{8}{3}} = R^8 \left[1 + \left(\frac{R_1}{R} \right)^3 \right]^{\frac{8}{3}} = R^8 \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{R_1}{R} \right)^3 + \dots \right],$$

on voit aisément que tous les coefficients devraient être nuls et que, par suite, il est impossible de satisfaire à la seconde des équations (28).

5. Ainsi, la recherche d'une loi d'attraction, point matériel à point matériel, ne conduit qu'à des impossibilités. Bien que certaines hypothèses aient été faites au courant des calculs, il semble que l'on soit plutôt amené à croire à l'incompatibilité de la fluidité de l'atome et de l'existence d'une loi d'attraction, point matériel à point matériel. C'est ce que je vais démontrer.

Soit un atome variable de forme et soient M et M' deux points matériels de cet atome. Supposons-le seul au monde; le mouvement qu'il prendra proviendra seulement de son action sur lui-même. Soient x, y, z les coordonnées de M ; x', y', z' celles de M' ; u, v, w les projections de la vitesse de M ; u', v', w' celles de la vitesse de M' ; u, v, w sont certaines fonctions de x, y, z et u', v', w' sont les mêmes fonctions de x', y', z' . Soient

$$\begin{aligned} X(x, y, z, x', y', z', u, v, w, u', v', w') & \delta v \delta v', \\ Y(x, y, z, x', y', z', u, v, w, u', v', w') & \delta v \delta v', \\ Z(x, y, z, x', y', z', u, v, w, u', v', w') & \delta v \delta v' \end{aligned}$$

les projections de la force provenant de l'action de M' sur M , dv étant l'élément de volume de M , dv' celui de M' , ρ la densité naturellement constante.

Les équations du mouvement sont

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} &= 0, \\ \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} &= \iiint X dx' dy' dz', \\ \frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz} &= \iiint Y dx' dy' dz', \\ \frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz} &= \iiint Z dx' dy' dz'.\end{aligned}$$

les intégrales triples étant étendues au volume de l'atome.

Dérivons la première par rapport à x , la seconde par rapport à y , la troisième par rapport à z ; on en tire en ajoutant

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + 2 \frac{du}{dy} \frac{dv}{dx} + 2 \frac{du}{dz} \frac{dw}{dx} + 2 \frac{dv}{dz} \frac{dw}{dy} \\ &= \iiint \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) dx' dy' dz'; \end{aligned} \right.$$

$\frac{dX}{dx}$, $\frac{dY}{dy}$, $\frac{dZ}{dz}$ représentent des différentielles totales des fonctions X , Y , Z qui contiennent x , y , z explicitement d'abord, puis dans u , v , w .

Je vais montrer qu'il est impossible de trouver des fonctions X , Y , Z satisfaisant à cette équation; pour cela je remarquerai que, d'une part, les fonctions u , v , w ne sont assujetties qu'à la relation

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

et que d'autre part, si nous supposons ces fonctions définies pour une étendue suffisante de l'espace, on peut faire varier la forme de l'atome, de façon à rendre arbitraire le contour de la surface à l'intérieur de laquelle est prise l'intégrale triple pourvu toutefois que le volume qu'elle comprend ne varie pas; car il est à remarquer que les fonctions X , Y , Z peuvent contenir ce volume; ce serait une constante caractéristique dans ces fonctions. Alors, si nous

précisons les fonctions u , v , w , l'équation (29) devient de la forme

$$F(x, y, z) = \iiint \Phi(x, y, z, x', y', z') dx' dy' dz',$$

F et Φ étant des fonctions convenables de leurs variables, et, si nous précisons alors les valeurs de x , y , z , l'équation précédente devient

$$\iiint \Pi(x', y', z') dx' dy' dz' = K,$$

K étant une constante indépendante de la surface limitant l'intégrale triple, Π une fonction de x' , y' , z' convenablement choisie. Je dis que cette fonction ne peut être qu'une constante. Considérons, en effet, deux points M_1 et M_2 ; faisons passer par ces deux points une surface comprenant le volume de l'atome. Si j'augmente d'une part la surface d'un petit volume v autour de M_1 , et d'autre part, si je la diminue d'un petit volume égal autour de M_2 , l'intégrale

$$\iiint \Pi(x', y', z') dx' dy' dz'$$

s'augmente sensiblement de

$$v \Pi(x'_1, y'_1, z'_1)$$

et diminue de

$$v \Pi(x'_2, y'_2, z'_2);$$

il faut donc, puisque la valeur de l'intégrale doit être constante, que l'on ait

$$\Pi(x'_1, y'_1, z'_1) = \Pi(x'_2, y'_2, z'_2).$$

Donc la fonction Φ ne devra pas contenir x' , y' , z' , et par suite l'expression

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}$$

ne devra pas contenir x' , y' , z' , ni u' , v' , w' . Or elle contient les dérivées des quantités u , v , w au premier degré seulement. L'équation (29) ne pourra donc jamais être satisfaite. C. Q. F. D.

SUR LE PENDULE DE LONGUEUR BRUSQUEMENT VARIABLE :

Par M. L. LECORNU.

Considérons un pendule simple, et imaginons qu'au moment du passage par la verticale le fil se trouve brusquement raccourci : que va devenir la vitesse? Si l'on applique le théorème des quantités de mouvement en projection horizontale, on est tenté de répondre que la vitesse linéaire n'est pas modifiée par le fait de la variation de longueur, car les deux forces agissantes, pesanteur et tension, sont toutes les deux verticales à cet instant. Dans ses *Leçons de Mécanique élémentaire*, Delaunay, pour faire la théorie de l'escarpolette, a supposé que les choses se passent effectivement ainsi. Cependant le théorème des moments des quantités de mouvement conduit à une tout autre conclusion : en vertu de ce théorème, comme le moment de la tension par rapport au point d'attache est constamment nul, et comme celui de la pesanteur s'annule aussi pour la position verticale du pendule, le moment de la quantité de mouvement, c'est-à-dire le produit de la vitesse linéaire par la longueur du pendule, doit demeurer invariable. En d'autres termes, la vitesse linéaire doit varier en raison inverse de la longueur.

Pour éclaircir cette difficulté, il faut envisager d'abord le cas d'un pendule qui se raccourcit dans un temps très court, mais fini, et faire ensuite tendre vers zéro cet intervalle de temps. Nous effectuerons d'ailleurs ce calcul sans avoir besoin de supposer que le raccourcissement coïncide avec le passage par la verticale. Soient, à un instant quelconque, l la longueur, θ l'angle d'inclinaison sur la verticale, ω la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$, T la tension du fil.

Prenons la masse du pendule égale à l'unité.

On a

$$T = g \cos \theta + \omega^2 l - \frac{d^2 l}{dt^2}.$$

Si nous choisissons comme direction horizontale positive celle qui correspond aux valeurs croissantes de θ , le théorème des

quantités de mouvement donne, pour chaque élément de temps dt ,

$$d(l\omega \cos \theta) + T \sin \theta dt = 0.$$

Remplaçant T par sa valeur, et tenant compte de l'identité

$$\frac{d^2 l}{dt^2} \sin \theta dt = d \left(\frac{dl}{dt} \sin \theta \right) - \omega \cos \theta dl,$$

il vient

$$\cos \theta [d(l\omega) + \omega dl] + g \cos \theta \sin \theta dt - d \left(\frac{dl}{dt} \sin \theta \right) = 0$$

ou bien, en intégrant de t_1 à t_2 ,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\cos \theta}{l} d(l^2 \omega) + g \int_{t_1}^{t_2} \cos \theta \sin \theta dt - \left[\frac{dl}{dt} \sin \theta \right]_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Si l'instant t_1 précède immédiatement et si l'instant t_2 suit immédiatement la phase de raccourcissement, $\frac{dl}{dt}$ est nul pour ces deux instants, ce qui fait disparaître le dernier terme. D'autre part, quand l'intervalle $t_2 - t_1$ tend vers zéro, il en est de même de l'intégrale $\int_{t_1}^{t_2} \cos \theta \sin \theta dt$. Il faut donc que la première intégrale ait aussi une limite nulle. Or, en appelant Λ une quantité comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs acquises par $\frac{\cos \theta}{l}$ dans les limites d'intégration, on a, avec une notation évidente,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\cos \theta}{l} d(l^2 \omega) = \Lambda [l^2 \omega]_2 - [l^2 \omega]_1.$$

On conclut de là que, pour $t_2 - t_1 = 0$, c'est-à-dire pour un raccourcissement instantané, le produit $l^2 \omega$ doit demeurer invariable : c'est précisément ce qu'indiquait *a priori* le théorème des moments. L'erreur commise par Delaunay consiste à négliger l'intégrale $\int T \sin \theta dt$, sous prétexte que $\sin \theta$ tend vers zéro, et sans faire attention que T devient en même temps infini. Le théorème des moments ne nécessite pas, pour son application, une discussion semblable, parce que le moment de la tension T par rapport au point d'attache est toujours *rigoureusement* nul.

Il est intéressant de rechercher à quelles conséquences conduit ici le théorème des forces vives. Le travail élémentaire des forces appliquées (tension et pesanteur) est

$$- T dl + g d(l \cos \theta)$$

ou bien

$$\frac{d^2 l}{dt^2} dl - \omega^2 l dl - g l \sin \theta d\theta.$$

Si le raccourcissement total $l_1 - l_2$ est produit dans un temps infiniment petit, le dernier terme donne une intégrale infiniment petite. Le premier terme, dont l'intégrale indéfinie est $\frac{1}{2} \left(\frac{dl}{dt} \right)^2$, donne un résultat nul, puisque $\frac{dl}{dt}$ est nul aux limites d'intégration. Il reste donc seulement

$$- \int_{l_1}^{l_2} \omega^2 l dl = \int_{l_2}^{l_1} \omega^2 l dl.$$

Mais $\omega l^2 = \omega_1 l_1^2 = \omega_2 l_2^2$. Le travail total est donc

$$\omega_1^2 l_1 \int_{l_2}^{l_1} \frac{dl}{l^3} = \frac{1}{2} \omega_1^2 l_1 \left(\frac{1}{l_2^2} - \frac{1}{l_1^2} \right),$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\frac{1}{2} (\omega_2^2 l_2^2 - \omega_1^2 l_1^2).$$

On trouve ainsi, comme il fallait s'y attendre, que le travail est égal à l'accroissement de force vive.

Au lieu d'appliquer le théorème des forces vives dans le mouvement absolu du pendule, on pourrait considérer le mouvement relatif par rapport à la direction de la tige. Le travail de la pesanteur et de la tension, dans le mouvement brusque dont il s'agit, resterait le même que précédemment. Mais, au lieu de se traduire par un accroissement de force vive, il se trouverait annihilé par le travail négatif de la force d'inertie d'entraînement, c'est-à-dire de la force centrifuge. Et, en effet, celle-ci a pour valeur absolue $\omega^2 l$, et pour travail élémentaire $\omega^2 l dl$.

J'ai cru devoir insister sur cette remarque presque évidente parce qu'elle montre nettement par quel mécanisme un système mobile à déformations intérieures, tel que l'assemblage d'une escarpolette et d'un gymnasiarque, peut développer de la force vive d'entraînement : le travail interne, considéré dans le mouvement relatif, est en partie employé à vaincre les forces d'inertie ; dans le mouvement absolu, ces forces apparentes n'existent pas, et le travail qu'elles absorbaient se transforme en force vive : de telle façon que, pour évaluer l'accroissement de la force vive d'entraînement, il suffit de connaître le travail des forces apparentes dans le mouvement relatif. Ajoutons toutefois, pour être exact, qu'on doit également tenir compte de ce que le travail de la pesanteur n'est pas le même, en général, dans le mouvement relatif que dans le mouvement absolu, et cela à cause des changements de direction que cette force éprouve par rapport au système entraîné. Il est aisé, en s'appuyant sur ces principes, de retrouver, par une autre voie, les équations auxquelles je suis parvenu dans ma *Théorie de l'escarpolette* (Association française, 1894).

THÉORÈME NOUVEAU DE RÉVERSIBILITÉ ALGÈBRIQUE;

Par M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

1. Il a paru récemment, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, sous le n° 811 et avec la signature BUENGER, une question intéressante de réversibilité algébrique. En voici l'énoncé textuel :

Si l'on pose

$$f(x, y, z) = x^2 - yz,$$

les formules

$$\frac{f(x, y, z)}{x} = \frac{f(y, z, x)}{y} = \frac{f(z, x, y)}{z}$$

donnent

$$\frac{f(X, Y, Z)}{x} = \frac{f(Y, Z, X)}{y} = \frac{f(Z, X, Y)}{z}.$$

Y a-t-il d'autres exemples analogues ?

En cherchant de tels exemples, j'ai obtenu un théorème général

qui en fournit une infinité : celui qu'on vient de lire n'est que le premier, c'est-à-dire le plus simple d'entre eux.

2. Considérons les deux suites, de n nombres chacune,

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3, \dots, \dots, x_n, \\ X_1, X_2, X_3, \dots, \dots, X_n. \end{aligned}$$

Avec les nombres de la première, formons le rectangle, de n colonnes et de $n - 1$ lignes,

$$\begin{array}{cccccc} x_2 & x_3 & x_4 & \dots\dots\dots & x_n & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots\dots\dots & x_1 & x_2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ x_n & x_1 & x_2 & \dots\dots\dots & x_{n-2} & x_{n-1} \end{array}$$

et, avec ceux de la seconde, le rectangle pareil

$$\begin{array}{cccccc} X_2 & X_3 & X_4 & \dots\dots\dots & X_n & X_1 \\ X_3 & X_4 & X_5 & \dots\dots\dots & X_1 & X_2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ X_n & X_1 & X_2 & \dots\dots\dots & X_{n-2} & X_{n-1}. \end{array}$$

Prenons les déterminants qui se déduisent du premier de ces rectangles par la suppression de la 1^{re}, de la 2^e, ..., de la $n^{\text{ième}}$ colonne, et, après les avoir affectés alternativement du signe + et du signe —, désignons-les par $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$; prenons enfin les déterminants qui se déduisent du second rectangle par le même procédé, et, après les avoir affectés aussi alternativement des signes + et —, désignons-les par $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$.

Le théorème général qui fait l'objet de la présente Note peut s'énoncer ainsi :

THÉORÈME. — *Si l'on a*

$$\frac{\delta_1}{X_1} = \frac{\delta_2}{X_2} = \dots = \frac{\delta_n}{X_n},$$

on a aussi

$$\frac{\Delta_1}{x_1} = \frac{\Delta_2}{x_2} = \dots = \frac{\Delta_n}{x_n};$$

et réciproquement.

3. Ce théorème, pour $n = 3$, nous donne, aux notations près, l'exemple cité par M. Buenger. Il nous en donne évidemment une infinité d'autres, d'autant plus compliqués qu'ils correspondent à des valeurs plus grandes de n . C'est un théorème très général. C'est aussi, ce me semble, un théorème nouveau. J'en ai envoyé à l'*Intermédiaire*, comme réponse à la question 811, l'énoncé tel qu'on vient de le lire, mais sans le faire suivre de la démonstration. C'est cette démonstration que je vais exposer maintenant.

4. Supposons que l'on ait

$$\frac{\delta_1}{X_1} = \frac{\delta_2}{X_2} = \dots = \frac{\delta_n}{X_n},$$

et considérons le déterminant

$$M = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_{n-1} & A_n \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_n & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots & x_1 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-2} & x_{n-1} \end{vmatrix},$$

qui est du $n^{\text{ième}}$ ordre et qui, par la suppression de sa première ligne, se réduit au premier des rectangles formés précédemment. Il est évident que nous avons

$$M = A_1 \delta_1 + A_2 \delta_2 + A_3 \delta_3 + \dots + A_{n-1} \delta_{n-1} + A_n \delta_n.$$

Or, si l'on remplace, dans ce déterminant M , les éléments A de la première ligne par les éléments correspondants d'une quelconque des lignes suivantes, ce déterminant s'annule. De là ces $n - 1$ identités

$$\begin{aligned} x_2 \delta_1 + x_3 \delta_2 + x_4 \delta_3 + \dots + x_n \delta_{n-1} + x_1 \delta_n &= 0, \\ x_3 \delta_1 + x_4 \delta_2 + x_5 \delta_3 + \dots + x_1 \delta_{n-1} + x_2 \delta_n &= 0, \\ \dots & \\ x_n \delta_1 + x_1 \delta_2 + x_2 \delta_3 + \dots + x_{n-2} \delta_{n-1} + x_{n-1} \delta_n &= 0. \end{aligned}$$

Ces identités étant homogènes par rapport aux quantités δ , nous pouvons y remplacer ces quantités δ par les quantités X qui leur correspondent et qui, d'après notre hypothèse, leur sont

LE PRINCIPE DE DUALITÉ ET CERTAINES INTÉGRALES MULTIPLES
DE L'ESPACE TANGENTIEL ET DE L'ESPACE RÉGLÉ;

Par M. ÉLIE CARTAN.

On a considéré de tout temps, depuis qu'il y a des géomètres, des intégrales multiples relatives à des ensembles de points dans le plan ou dans l'espace, intégrales exprimant des propriétés *métriques* de ces ensembles, c'est-à-dire ne changeant pas de valeur lorsqu'on fait subir aux points un même déplacement dans le plan ou dans l'espace. De cette nature sont l'*aire* d'une portion du plan et le *volume* d'une portion de l'espace.

Il est tout naturel, après les développements qu'a pris dans ce siècle le *principe de dualité* qui nous fait regarder le plan comme engendré par des *droites* aussi bien que par des *points*, et l'espace comme engendré par des *plans* aussi bien que par des *points*, de se demander si certaines intégrales multiples étendues à des *ensembles de droites* dans le plan ou à des *ensembles de plans* dans l'espace ne jouiraient pas de propriétés analogues à l'*aire* et au *volume*, c'est-à-dire ne pourraient pas être invariantes lorsqu'on fait subir à toutes ces droites ou à tous ces plans un même déplacement. La question, ainsi posée, se réduit à un pur problème de calcul, grâce aux théories de M. Lie, qui permettent de former *toutes* ces quantités. Néanmoins, on peut les considérer à un point de vue plus élémentaire que celui que nécessiterait l'application des méthodes de M. Lie et les former *a priori*. Voici les principaux résultats auxquels on arrive.

Il existe dans le plan, regardé comme engendré par des droites, une intégrale double invariante exprimant une propriété métrique d'un ensemble quelconque de droites dépendant de deux paramètres, pourvu que parmi les droites de cet ensemble ne figure pas la droite de l'infini. *Si l'on prend l'ensemble des droites qui coupent un segment de droite donné, l'intégrale correspondante est égale au double de la longueur de ce segment; si l'on prend l'ensemble des droites qui coupent une courbe fermée convexe, on obtient le périmètre de cette courbe.*

Il existe encore dans le plan une autre intégrale simple étendue à des droites dépendant d'un seul paramètre : elle exprime simplement l'angle des deux droites limites.

Dans l'espace *tangentiel*, c'est-à-dire considéré comme engendré par des plans, il existe de même deux intégrales : l'une double, étendue à des ensembles de plans dépendant de deux paramètres, exprime l'aire découpée sur une sphère de rayon égal à l'unité par les normales aux plans menées par le centre de cette sphère. La deuxième est une intégrale triple et est donc étendue à des ensembles de plans quelconques, pourvu toutefois que le plan de l'infini ne soit pas l'un d'eux. *Étendue à l'ensemble des plans qui coupent un arc de courbe, cette intégrale est égale au produit de π par la longueur de cet arc de courbe.* Mais ce qui fait surtout l'intérêt de cette intégrale, c'est que *si on l'étend à l'ensemble des plans qui coupent une surface fermée convexe, pour fixer les idées, on a une nouvelle quantité, qu'on peut appeler le périmètre de cette surface, de la même dimension qu'une longueur; le périmètre ainsi défini d'une sphère est égal au quadruple de son diamètre; celui d'un cylindre droit est égal au périmètre ordinaire de sa base augmenté du double de la hauteur.* Le périmètre d'une surface fermée peut donc être regardé, en un certain sens, comme le *dualistique* du volume situé à l'intérieur de cette surface.

Enfin, on peut aussi regarder l'espace comme engendré par des droites, ce qui le rend son propre dualistique, et il existe aussi dans l'espace réglé des intégrales multiples *métriques*. Une de ces intégrales est une intégrale quadruple et, par suite, s'étend à des ensembles de droites quelconques; *étendue à l'ensemble des droites qui coupent une portion de surface, elle est égale au produit de π par l'aire de cette portion de surface; étendue à l'ensemble des droites qui coupent une surface fermée convexe, elle est égale au produit de $\frac{\pi}{2}$ par l'aire de cette surface.*

Il existe deux autres intégrales de l'espace réglé, et elles sont doubles, par suite s'étendent à des ensembles de droites d'une congruence; l'une d'elles représente l'aire découpée, sur une sphère de rayon égal à l'unité, par les parallèles à ces droites me-

nées par le centre de la sphère. Quant à l'autre, elle jouit de la propriété de se reproduire, divisée par n , lorsque les droites de la congruence se réfractent à travers une surface dans un milieu d'indice n ; de plus, la condition nécessaire et suffisante pour que les droites d'une congruence soient normales à une même surface est que l'intégrale relative à tout *pinceau* de la congruence soit nulle, d'où résulte immédiatement que, *par réfraction, la congruence des droites normales à une surface se change en une congruence jouissant de la même propriété*, ce qui est un théorème bien connu.

La forme même de toutes ces intégrales suggère l'idée de les généraliser en définissant les angles et les distances au moyen de rapports anharmoniques relativement à une quadrique quelconque remplaçant le cercle imaginaire de l'infini. Ces intégrales généralisées jouissent de propriétés essentiellement analogues aux premières. Celles qui sont relatives à l'espace réglé conduisent même à des remarques intéressantes sur le complexe des tangentes à une quadrique; mais leur développement aurait été un peu étranger au sujet, et je me suis contenté d'indiquer l'existence de ces intégrales.

Les deux premiers paragraphes sont consacrés aux intégrales du plan, le troisième aux intégrales de l'espace tangentiel, le quatrième aux intégrales doubles et le cinquième à l'intégrale quadruple de l'espace réglé.

§ 1.

Étant donnés, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires Ox , Oy , considérons un ensemble de droites

$$ux + vy + 1 = 0$$

et l'intégrale double

$$(1) \quad \iint \frac{du dv}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}$$

étendue à toutes les droites de cet ensemble. Cette quantité jouit de la propriété remarquable de ne pas changer de valeur lorsqu'on fait subir à toutes les droites considérées un même déplacement dans le plan, ou encore, ce qui revient au même,

lorsqu'on effectue un changement quelconque de coordonnées rectangulaires.

Pour démontrer ce fait et le mettre nettement en évidence, introduisons les coordonnées *homogènes* de la droite, c'est-à-dire remplaçons u et v par $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$, où u , v , w devront être regardées comme fonctions de *deux* paramètres α et β . Alors ⁽¹⁾

$$dudv = d\frac{u}{w} d\frac{v}{w} = \frac{u dv dw + v dw du + w dudv}{w^3}.$$

Par suite, l'intégrale double devient

$$(2) \quad \iint \frac{u dv dw + v dw du + w dudv}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, tout changement de coordonnées rectangulaires revient à effectuer sur u , v , w une substitution linéaire reproduisant la forme $u^2 + v^2$ à un facteur constant près. Mais, par une substitution linéaire quelconque, le numérateur de la quantité sous le signe $\iint$ se reproduit, multiplié par le déterminant de la substitution ; car des formules

$$(3) \quad \begin{cases} u = a u' + b v' + c w', \\ v = a' u' + b' v' + c' w', \\ w = a'' u' + b'' v' + c'' w', \end{cases}$$

(1) On a, en effet,

$$dudv = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy;$$

si l'on pose

$$\begin{aligned} u &= f(\lambda, \mu, \nu, \dots, \xi), & v &= \varphi(\lambda, \mu, \nu, \dots, \xi), \\ du &= A d\lambda + B d\mu + \dots + C d\xi, & dv &= A' d\lambda + B' d\mu + \dots + C' d\xi, \end{aligned}$$

on a

$$dudv = (A d\lambda + B d\mu + \dots + C d\xi) (A' d\lambda + B' d\mu + \dots + C' d\xi),$$

à condition de remplacer, dans le produit du second membre effectué *sans altérer l'ordre des différentielles* de chaque produit partiel, $d\lambda d\lambda$ par 0 et $d\lambda d\mu = -d\mu d\lambda$ par $\frac{D(\lambda, \mu)}{D(x, y)} dx dy$.

on déduit

$$\begin{aligned} & u dv dw + v dw du + w du dv \\ &= \begin{vmatrix} u & v & w \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} dv' dw' + \dots + \begin{vmatrix} u & v & w \\ a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{vmatrix} du' dv' \\ &= \Delta(u' dv' dw' + v' dw' du' + w' du' dv'). \end{aligned}$$

D'autre part, en ce qui regarde le dénominateur, il se reproduit, dans le cas présent, à un facteur constant près. Ce facteur est égal à Δ . En effet, d'abord $c = c' = 0$; de plus, si l'on exprime

$$ax + cy + w = \lambda(u'x' + v'y' + w'),$$

on trouve

$$\begin{cases} \lambda x' = ax + a'y + a'', \\ \lambda y' = bx + b'y + b'', \\ \lambda = c'', \end{cases}$$

formules qui doivent représenter un changement de coordonnées rectangulaires; donc

$$ab' - ba' = c''^2,$$

et comme la forme $u^2 + v^2$ se reproduit multipliée par le déterminant de la substitution en u, v ⁽¹⁾, le facteur cherché est

$$(ab' - ba')^{\frac{3}{2}} = (ab' - ba')c'' = \Delta.$$

On voit donc finalement que la quantité sous le signe $\iint$, dans l'intégrale (2), se reproduit par tout changement de coordonnées rectangulaires. *L'intégrale (2) exprime donc une propriété métrique de l'ensemble de droites considéré.*

Forme particulière de l'équation double. — Prenons pour u, v, w les coordonnées normales de la droite

$$u = \cos x, \quad v = \sin x, \quad w = -p;$$

(1) Si

$$u'^2 + v'^2 = h(u^2 + v^2),$$

le discriminant de la nouvelle forme, qui est égal à h^2 , doit être égal au carré du déterminant de la substitution; d'où

$$h^2 = ab' - ba'.$$

alors $du dv$ s'annule, et il reste

$$\iint (u dv - v du) dw = \iint dp dz.$$

En particulier, si l'on considère l'ensemble des droites qui *coupent* un cercle donné de rayon R , cercle qu'on peut, d'après ce qui précède, supposer décrit de l'origine comme centre, il faut faire varier p de 0 à R et z de 0 à 2π ; ce qui donne, dans ce cas,

$$\iint dp dz = 2\pi R,$$

c'est-à-dire le *périmètre du cercle*. C'est un cas particulier du théorème suivant :

L'intégrale double $\iint \frac{u dv dw + v dw du + w du dv}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}$, étendue à toutes les droites qui coupent une courbe fermée convexe, est égale au périmètre de cette courbe.

Ce théorème est lui-même une conséquence du suivant :

L'intégrale double précédente, étendue à toutes les droites qui rencontrent un segment de droite donné, est égale au double de la longueur de ce segment.

Démonstration. — On pourrait démontrer ce théorème en donnant au segment une position particulière; mais on peut aussi le démontrer directement dans le cas général.

Soient u_0, v_0, w_0 les coordonnées normales de la droite qui porte le segment; on a

$$\begin{aligned} u_0^2 + v_0^2 &= 1, \\ u_0 x + v_0 y + w_0 &= 0, \\ u_0 dx + v_0 dy &= 0. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{cases} u_0 u + v_0 v = \lambda, \\ v_0 u - u_0 v = \mu, \\ u^2 + v^2 = 1; \end{cases}$$

on aura alors

$$(4) \quad \lambda^2 + \mu^2 = 1,$$

et l'on devra donner à λ et μ toutes les valeurs, de façon que le rapport $\frac{u}{v}$ passe une fois et une seule par une valeur donnée; ce qu'on obtiendra en prenant μ positif et λ quelconque. On aura alors

$$\begin{cases} u = u_0 \lambda + v_0 \mu, \\ v = v_0 \lambda - u_0 \mu, \\ w = w_0 \lambda + \mu (u_0 y - v_0 x) \end{cases}$$

et, par suite, en vertu de (4),

$$\begin{aligned} u dv dw + v dw du + w du dv &= (u dv - v du) dw \\ &= \mu (\lambda d\mu - \mu d\lambda) (u_0 dy - v_0 dx). \end{aligned}$$

Enfin on a

$$(u_0 dy - v_0 dx)^2 = (u_0^2 + v_0^2)(dx^2 + dy^2) - (u_0 dx + v_0 dy)^2 = dx^2 + dy^2,$$

de sorte que

$$\iint \frac{u dv dw + v dw du + w du dv}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} = \iint \mu (\lambda d\mu - \mu d\lambda) \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

En posant

$$\lambda = \sin \varphi, \quad \mu = \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

cette intégrale se transforme enfin en

$$\iint \sqrt{dx^2 + dy^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi = 2s,$$

s désignant la longueur du segment.

Il résulte immédiatement de là que, *étant donné un arc de courbe quelconque, on obtient en coordonnées tangentielles le double de la longueur de cet arc en prenant l'intégrale double*

$$\iint \frac{du dv}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}$$

étendue aux droites qui coupent l'arc de courbe autant de fois qu'elles ont de points d'intersection avec cet arc.

Ce théorème contient comme cas particulier celui qui est relatif à une courbe fermée convexe. Par exemple, pour l'ellipse

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 = 1 \quad a, b,$$

on peut obtenir toutes les droites en question en posant

$$u = \frac{r}{a} \cos \varphi, \quad v = \frac{r}{b} \sin \varphi, \quad r > 1, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$

et alors

$$\begin{aligned} \iint \frac{du dv}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} &= \iint \frac{a^2 b^2 dr d\varphi}{r^2 (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a^2 b^2 d\varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

§ 2.

Au lieu de se placer en coordonnées rectangulaires, on peut aussi se placer en coordonnées obliques. Si alors

$$\varphi(u, v) = 0,$$

est l'équation tangentielle des points circulaires à l'infini, il n'y a qu'à considérer l'intégrale double

$$\iint \frac{\sqrt{\delta}(u dv dw + v dw du + w du dv)}{[\varphi(u, v)]^{\frac{3}{2}}},$$

δ désignant le discriminant de la forme φ . Cette intégrale est égale à la précédente; par exemple, si

$$\varphi(u, v) = u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta,$$

on a

$$\iint \frac{\sin \theta (u dv dw + v dw du + w du dv)}{[u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta]^{\frac{3}{2}}}.$$

Plus généralement considérons une conique, que nous appellerons *conique fondamentale* ou *conique absolue*, ayant pour équation tangentielle

$$(1) \quad \varphi(u, v, w) = 0,$$

et considérons l'intégrale double

$$(2) \quad \iint \frac{\sqrt{\Delta}(u dv dw + v dw du + w du dv)}{[\varphi(u, v, w)]^{\frac{3}{2}}},$$

où Δ désigne le discriminant de la forme φ .

Si l'on effectue sur u, v, w une substitution linéaire quelconque de déterminant D , la forme φ se change en une forme φ' , dont le discriminant Δ' est égal à ΔD^2 , de sorte que

$$\begin{aligned} I &= \iint \frac{\sqrt{\Delta D}(u' dv' dw' + v' dw' du' + w' du' dv')}{[\varphi'(u', v', w')]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \iint \frac{\sqrt{\Delta'}(u' dv' dw' + \dots)}{\varphi'^{\frac{3}{2}}}; \end{aligned}$$

I conserve la même forme. L'intégrale I , étendue à un ensemble de droites donné, représente donc une quantité attachée à cet ensemble de droites et à la conique fondamentale, *quantité qui se conserve par une substitution linéaire quelconque effectuée sur les droites et la conique.*

En particulier, on peut se proposer de chercher la signification de cette intégrale, lorsqu'on l'étend à l'ensemble des droites qui coupent un segment de droite donné, ou plus généralement un arc de courbe donné. Il faut naturellement, pour que cela ait un sens, que la forme φ ne puisse s'annuler pour aucune de ces droites, c'est-à-dire ou bien que φ soit une forme définie, ou bien, s'il n'en est pas ainsi, que le segment considéré soit tout entier à l'intérieur de la conique fondamentale.

Mais, avant d'aller plus loin, il est nécessaire de rappeler quelques définitions souvent usitées en Géométrie projective.

Étant donnés deux points A, B (à l'intérieur de la conique fondamentale, si cette dernière est réelle) appelons *distance* de ces deux points le logarithme, divisé par $2i$ (ou par 2 , si la conique est réelle), du rapport anharmonique des points A, B et des deux points d'intersection de la droite AB avec la conique.

Étant de même données deux droites (se coupant à l'intérieur de la conique, si celle-ci est réelle), appelons *angle* de ces deux droites le logarithme, divisé par $2i$, du rapport anharmonique de ces deux droites et des deux tangentes à la conique menées par leur point d'intersection.

Cette dernière définition coïncide avec la définition ordinaire si la conique fondamentale est formée des deux points circulaires à l'infini.

Si l'on fait la perspective sur un plan d'une sphère, le point de vue étant au centre de la sphère, et qu'on prenne pour conique fondamentale l'intersection du plan et du cône asymptote de la sphère, on retombe sur la *distance* sphérique des points de la sphère dont on prend la perspective et sur l'*angle* des grands cercles qui se transforment en droites; de sorte qu'on a affaire, dans ce cas, à la Géométrie sphérique ordinaire.

Quoi qu'il en soit, cherchons, d'après ces définitions, l'expression de la distance d de deux points (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) . Les coordonnées des points d'intersection de la conique avec la droite qui les joint sont de la forme

$$x_1 + \lambda x_2, \quad y_1 + \lambda y_2, \quad z_1 + \lambda z_2,$$

et il faut donner à λ les deux valeurs λ_1, λ_2 , racines de l'équation

$$f(x_1, y_1, z_1) + 2\lambda(x_2 f'_{x_1} + y_2 f'_{y_1} + z_2 f'_{z_1}) + \lambda^2 f(x_2, y_2, z_2) = 0,$$

où f désigne le premier membre de l'équation ponctuelle de la conique et f'_x, f'_y, f'_z ses *demi-dérivées*. On a donc par définition, si la conique est imaginaire,

$$e^{2id} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \frac{e^{id} - e^{-id}}{2i} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2i\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}},$$

c'est-à-dire

$$(3) \quad \sin d = \sqrt{\frac{f(x_1, y_1, z_1) f(x_2, y_2, z_2) - (x_2 f'_{x_1} + y_2 f'_{y_1} + z_2 f'_{z_1})^2}{f(x_1, y_1, z_1) f(x_2, y_2, z_2)}},$$

et de même, si la conique est réelle,

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} sh d &= \frac{e^d - e^{-d}}{2} \\ &= \sqrt{\frac{(x_2 f'_{x_1} + y_2 f'_{y_1} + z_2 f'_{z_1})^2 - f(x_1, y_1, z_1) f(x_2, y_2, z_2)}{f(x_1, y_1, z_1) f(x_2, y_2, z_2)}}. \end{aligned} \right.$$

Nous aurons de même, pour l'angle V de deux droites (u_1, v_1, w_1) et (u_2, v_2, w_2) , la formule

$$(4) \quad \sin V = \sqrt{\frac{\varphi(u_1, v_1, w_1) \varphi(u_2, v_2, w_2) - (u_2 \varphi'_{u_1} + v_2 \varphi'_{v_1} + w_2 \varphi'_{w_1})^2}{\varphi(u_1, v_1, w_1) \varphi(u_2, v_2, w_2)}}.$$

En particulier, la distance ds de deux points infiniment voisins

(x, y, z) et $(x + dx, y + dy, z + dz)$ est

$$ds = \sqrt{\frac{f(x, y, z) \cdot f(dx, dy, dz) - (f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz)^2}{f(x, y, z)^2}},$$

et, si l'on choisit x, y, z de façon que $f(x, y, z)$ garde une valeur constante,

$$(5) \quad ds = \sqrt{\frac{f(dx, dy, dz)}{f(x, y, z)}} \quad \text{ou} \quad ds = \sqrt{-\frac{f(dx, dy, dz)}{f(x, y, z)}},$$

suivant que la conique est imaginaire ou réelle.

De même l'angle dV de deux droites infiniment voisines est

$$(6) \quad dV = \sqrt{\frac{\varphi(du, dv, dw)}{\varphi(u, v, w)}},$$

en supposant $\varphi(u, v, w)$ constant.

Cela étant, considérons l'intégrale I et cherchons sa valeur lorsqu'on l'étend à toutes les droites qui coupent un segment AB (situé à l'intérieur de la conique fondamentale, dans le cas où elle est réelle). Soient u_0, v_0, w_0 les coordonnées de la droite AB, et supposons que $f(x, y, z)$ est la forme adjointe de φ , ses coefficients étant les mineurs du discriminant de φ . Posons

$$u\varphi'_{u_0} + v\varphi'_{v_0} + w\varphi'_{w_0} = \lambda.$$

Alors u, v, w sont déterminés par les équations

$$(7) \quad \begin{cases} u\varphi'_{u_0} + v\varphi'_{v_0} + w\varphi'_{w_0} = \lambda, \\ ux + vy + wz = 0, \\ \varphi(u, v, w) = \varphi, \end{cases}$$

φ étant une valeur qu'on peut supposer constante. Pour résoudre les équations (7), introduisons le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi'_{u_0} & \varphi'_{v_0} & \varphi'_{w_0} \\ \varphi'_{u_0} & \varphi'_{v_0} & \varphi'_{w_0} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_0 & v_0 & w_0 \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{vmatrix},$$

cette dernière identité résultant de ce que f est la forme adjointe de φ .

On a, en faisant le produit de ces deux derniers déterminants,

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_0 & v_0 & w_0 \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \varphi(u, v, w) & \lambda & 0 \\ \lambda & \varphi(u_0, v_0, w_0) & 0 \\ 0 & 0 & f(x, y, z) \end{vmatrix} = f(x, y, z)(\varphi\varphi_0 - \lambda^2).$$

Si donc on pose

$$(v_0 f'_z - w_0 f'_y) u + (w_0 f'_x - u_0 f'_z) v + (u_0 f'_y - v_0 f'_x) w = \mu,$$

on aura

$$(8) \quad \mu^2 + f(x, y, z)\lambda^2 = f(x, y, z) \varphi(u, v, w) \varphi(u_0, v_0, w_0).$$

On peut remarquer que, dans l'hypothèse faite, f est essentiellement positif ⁽¹⁾.

On a donc trois équations linéaires pour déterminer u, v, w en fonction de λ, μ, x, y, z , et il suffira de donner à μ des valeurs positives et à λ des valeurs positives ou négatives, de façon à satisfaire à l'équation (8). Enfin, on pourra s'astreindre à multiplier x, y, z par un facteur tel que $f(x, y, z)$ reste constant; alors λ et μ seront fonctions d'un même paramètre.

La résolution des équations donne, après un calcul facile,

$$(9) \quad \begin{cases} f(x, y, z) \varphi(u_0, v_0, w_0) u = u_0 f(x, y, z) \lambda + (\varphi'_{v_0} z - \varphi'_{w_0} y) \mu, \\ f(x, y, z) \varphi(u_0, v_0, w_0) v = v_0 f(x, y, z) \lambda + (\varphi'_{w_0} x - \varphi'_{u_0} z) \mu, \\ f(x, y, z) \varphi(u_0, v_0, w_0) w = w_0 f(x, y, z) \lambda + (\varphi'_{u_0} y - \varphi'_{v_0} x) \mu, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} & f^3 \varphi_0^3 (u dv dw + v dw du + w du dv) \\ &= \begin{vmatrix} v_0 f & \varphi'_{w_0} x - \varphi'_{u_0} z \\ u_0 f & \varphi'_{v_0} y - \varphi'_{w_0} x \end{vmatrix} (\lambda d\mu - \mu d\lambda) (\varphi'_{v_0} dz - \varphi'_{w_0} dy) + \dots \\ &= \mu f \varphi_0 (\lambda d\mu - \mu d\lambda) \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ \varphi'_{u_0} & \varphi'_{v_0} & \varphi'_{w_0} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(¹) Car si la conique est imaginaire, Δf est une forme définie positive; si elle est réelle, Δf est positif pour tout point à son intérieur; or ici Δ est le carré du discriminant de φ , donc toujours positif.

Pour calculer le déterminant du second membre, remarquons qu'il est égal à

$$\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} f'_{dx} & f'_{dy} & f'_{dz} \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ u_0 & v_0 & w_0 \end{vmatrix}$$

et que, par suite, son carré est égal à

$$\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} f(dx, dy, dz) & 0 & 0 \\ 0 & f(x, y, z) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi(u_0, v_0, w_0) \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} f(dx, dy, dz) f(x, y, z) \varphi(u_0, v_0, w_0).$$

Donc

$$I = \int \int \frac{\mu(\lambda d\mu - \mu d\lambda)}{f^2 \varphi_0^2} \frac{\sqrt{f(dx, dy, dz) f(x, y, z) \varphi(u_0, v_0, w_0)}}{[\varphi(u, v, w)]^{\frac{3}{2}}},$$

ou, en posant

$$\lambda = \alpha \sqrt{\varphi \varphi_0}, \quad \mu = \beta \sqrt{f \varphi \varphi_0},$$

$$(10) \quad I = \int \int \beta(\alpha d\beta - \beta d\alpha) . ds = \nu s,$$

s désignant la distance AB (*).

D'ailleurs, ce résultat était à prévoir par des considérations d'invariants. Si l'on considère une droite quelconque et deux points A et B sur cette droite, l'intégrale I, étendue à toutes les droites qui coupent le segment AB, est une fonction des deux extrémités qu'on peut désigner par $\overline{AB}$ et qui jouit manifestement de la propriété

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC};$$

de plus, c'est une fonction du segment AB qui ne change pas lorsqu'on effectue sur A, B et la conique fondamentale une même substitution linéaire. On peut démontrer que la *distance* des deux points A et B, telle qu'elle a été définie plus haut, est, à un fac-

(*) Dans le cas où la conique fondamentale est réelle, $\Delta \varphi$ est négatif et il faut prendre pour I

$$I = \int \int \frac{\Delta(u dv dw + v dw du + w du dv)}{(-\Delta \varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui conduit au même résultat.

teur constant près, la seule fonction qui jouisse de cette propriété. Cela est d'ailleurs évident si la conique fondamentale se réduit aux deux points circulaires à l'infini.

Nous pouvons donc énoncer, sur l'intégrale double I, les mêmes théorèmes qu'au paragraphe premier; en particulier, sur la *longueur* d'un arc de courbe (relativement à la conique fondamentale) et le périmètre d'une ligne fermée convexe. Ces théorèmes s'appliquent immédiatement en Géométrie sphérique; u , v , w désignent alors les *coordonnées* d'un grand cercle de la sphère (coordonnées ponctuelles du pôle de ce grand cercle).

La formule qui donne ainsi sur une sphère le périmètre d'un triangle sphérique au moyen d'une intégrale double ne doit pas nous étonner; *cette intégrale double représente simplement l'aire de la portion de la sphère extérieure au triangle supplémentaire du triangle considéré*, d'après la signification même de u , v , w , si l'on prend

$$\varphi(u, v, w) = u^2 + v^2 + w^2 = 1.$$

En effet, comme vérification, si a , b , c sont les côtés du triangle, son périmètre est $a + b + c$ et les angles du triangle supplémentaire sont $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$. L'aire de ce triangle est donc

$$(\pi - a) + (\pi - b) + (\pi - c) - \pi = 2\pi - a - b - c$$

et l'aire de la portion de la sphère extérieure à ce triangle est bien

$$2\pi - (2\pi - a - b - c) = a + b + c.$$

D'ailleurs, l'intégrale double qui donne l'aire est tout à fait la dualistique de la première; il suffit de considérer

$$J = \iint \frac{\sqrt{\Delta}(x dy dz + y dz dx + z dx dy)}{[f(x, y, z)]^{\frac{3}{2}}},$$

Δ désignant maintenant le discriminant de f . En Géométrie ordinaire, $f = z^2$, et l'on a simplement, en faisant $z = 1$, l'intégrale $\iint dx dy$. En Géométrie sphérique, on a l'aire d'une portion de la sphère. On démontre, d'une façon identique à celle de I, que cette intégrale, étendue à l'espace compris dans l'angle de

deux droites (et dans son opposé par le sommet), aucun point de ces droites et aucun des points à l'intérieur n'étant sur la conique fondamentale, est égale au double de l'angle des deux droites ; d'où l'on déduit immédiatement un théorème sur l'aire de la portion du plan extérieur à une courbe fermée convexe (conique fondamentale *imaginaire*) au moyen de la quantité dont varie l'angle de contingence lorsqu'on parcourt la courbe ($\pi - A + \pi - B + \pi - C$ dans le cas d'un triangle).

§ 3.

On peut généraliser les résultats précédents, presque sans modification, pour passer du plan à l'espace. Nous appellerons x, y, z, t les coordonnées ponctuelles et u, v, w, h les coordonnées tangentielles.

Si nous prenons d'abord les coordonnées cartésiennes rectangulaires, nous considérerons l'intégrale triple ⁽¹⁾

$$(1) \quad I = \iiint \frac{u \, dv \, dw \, dh + v \, dw \, du \, dh + w \, du \, dv \, dh - h \, du \, dv \, dw}{(u^2 + v^2 + w^2)^2}.$$

Cette intégrale se reproduit par toute transformation de coordonnées rectangulaires, le numérateur se reproduisant multiplié par le déterminant de la substitution, le dénominateur se trouvant multiplié par le même facteur.

Si l'on étend cette intégrale à un segment de droite, par exemple porté par l'axe des z , on doit trouver une quantité proportionnelle à la longueur de ce segment. En effet, si l'on pose

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 &= 1, \\ wz - h &= 0, \end{aligned}$$

l'intégrale deviendra

$$\iiint (u \, dv \, dw + v \, dw \, du + w \, du \, dv) dz;$$

(1) Il est entendu que, si x, y, z sont des fonctions de trois paramètres α, β, γ ,

$$dx \, dy \, dz = d\alpha \, d\beta \, d\gamma = d\alpha \, d\beta \, d\gamma = \frac{D(x, y, z)}{D(\alpha, \beta, \gamma)} d\alpha \, d\beta \, d\gamma;$$

u, v, w prenant toutes les valeurs possibles sur la portion de la sphère de rayon 1 et de centre 0 située au-dessus du plan des xy , et z variant de z_1 à z_2 ; on peut donc poser

$$\begin{cases} u = \cos \theta \cos \varphi, \\ v = \cos \theta \sin \varphi, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \\ w = \sin \theta, \end{cases}$$

et alors

$$(2) \quad I = (z_2 - z_1) \iint \sin \theta \cos \theta \, d\theta \, d\varphi = \pi (z_2 - z_1).$$

L'intégrale triple I étendue à toutes les droites qui coupent un arc de courbe donné, chacune d'elles étant prise autant de fois qu'elle a de points d'intersection avec l'arc, est égale à la longueur de cet arc de courbe, multipliée par π .

Par exemple, étendue à toutes les droites qui coupent une courbe fermée plane convexe, l'intégrale I est égale au périmètre de la courbe, multiplié par $\frac{\pi}{2}$.

On peut aussi étendre l'intégrale I à l'ensemble des plans qui coupent une surface fermée convexe; on peut alors toujours supposer que l'origine est à l'intérieur de la surface; si l'on astreint u, v, w à satisfaire à la relation

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1,$$

et si l'on considère la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine, à chaque point M de la surface correspond, sur la sphère, un point m trace de la perpendiculaire au plan tangent en M menée par l'origine. Si alors p est la distance de l'origine au plan tangent, l'intégrale est

$$(3) \quad I = \iint p \, d\tau,$$

$d\tau$ désignant l'élément de surface de la sphère en m .

On a donc là une nouvelle quantité *métrique* attachée à la surface fermée convexe et *indépendante du choix du point O à l'intérieur de la surface*. Pour une sphère, c'est $\frac{4}{3}\pi R$; pour l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad a, b, c > 0,$$

cette nouvelle quantité est l'intégrale double

$$\iint \sqrt{a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2} dz,$$

u, v, w désignant les coordonnées d'un point de la sphère de rayon 1 concentrique à l'ellipsoïde.

Si l'on est en coordonnées obliques, ou d'une manière générale, si l'équation tangentielle du cercle imaginaire à l'infini est

$$\varphi(u, v, w) = 0,$$

on a

$$(1) \quad I = \iint \frac{\sqrt{\delta}(u dv dw dh + v dw du dh + w du dv dh - h du dv dw)}{[\varphi(u, v, w)]^2},$$

δ désignant le discriminant de la forme φ .

Généralisation. — De la même façon qu'en Géométrie plane, considérons une quadrique, d'équation tangentielle

$$\varphi(u, v, w, h) = 0,$$

que nous nommerons *quadrique fondamentale*, et l'intégrale triple

$$(5) \quad I = \iiint \frac{\sqrt{\pm \Delta}(u dv dw dh + v dw du dh + w du dv dh - h du dv dw)}{[\varphi(u, v, w, h)]^2},$$

Δ désignant le discriminant, supposé différent de zéro, de la forme φ .

Par une substitution linéaire effectuée sur u, v, w, h , le numérateur se reproduit multiplié par le déterminant D de la substitution, et le discriminant de la nouvelle forme φ est égal à $\Delta.D^2$, de sorte que I se change dans la même expression relative à la forme transformée φ' . De plus, si l'on multiplie φ par une constante m , le dénominateur est multiplié par m^2 , mais, le discriminant Δ étant multiplié par m^4 , le numérateur est également multiplié par m^2 .

L'intégrale triple I , étendue à un ensemble de plans (dont aucun n'est tangent à la quadrique fondamentale), est donc une quantité attachée à cet ensemble de plans et à la quadrique, et qui ne change pas par une même substitution linéaire quelconque effectuée sur les plans et la quadrique.

On peut, comme dans le paragraphe précédent, définir la *dis-*

tance de deux points et l'angle de deux plans relativement à la quadrique fondamentale. En particulier, la distance de deux points infiniment voisins est

$$(6) \quad ds = \sqrt{\pm \frac{f(dx, dy, dz, dt)}{f(x, y, z, t)}},$$

$f=0$ désignant l'équation ponctuelle de la quadrique, la forme f étant assujettie à rester constante, les deux signes correspondant aux deux cas où la droite, qui joint les deux points, ne coupe pas ou coupe la quadrique.

De même, l'angle de deux plans infiniment voisins est

$$(7) \quad dV = \sqrt{\pm \frac{\varphi(du, dv, dw, dh)}{\varphi(u, v, w, h)}},$$

les deux signes correspondant aux deux cas où les plans tangents à la quadrique menés par la droite d'intersection des deux plans sont imaginaires ou réels (la forme φ gardant la même valeur pour les deux plans).

Cela étant, cherchons la signification de l'intégrale I étendue à tous les plans qui coupent un segment de droite MN. Pour que cette intégrale ait un sens il faut que, d'aucun des points du segment MN, on ne puisse mener de plan tangent réel à la quadrique fondamentale.

On peut toujours, par une transformation homographique, faire en sorte que la droite MN ait pour équations

$$x = 0, \quad y = 0,$$

et que φ soit de la forme

$$\varphi = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + Dh^2.$$

En écrivant que le plan (u, v, w, h) coupe le segment MN, nous obtenons

$$wz + ht = 0,$$

ce qui permet de poser

$$(8) \quad w = \lambda t, \quad h = -\lambda z,$$

et, par suite :

$$\varphi = Au^2 + Bv^2 + \lambda^2(Ct^2 + Dz^2).$$

Comme u, v, λ peuvent prendre toutes les valeurs possibles et que φ doit garder un signe constant, il faut nécessairement que $A, B, Ct^2 + Dz^2$ aient, pour tous les points du segment MN , le même signe. Il y aura donc deux cas à distinguer :

Où A, B, C, D ont le même signe, et alors on peut supposer

$$\varphi = u^2 + v^2 + w^2 + s^2;$$

Où A, B, C sont de même signe, contraire à celui de D , et alors on peut supposer

$$\varphi = u^2 + v^2 + w^2 - s^2,$$

avec

$$t^2 - z^2 > 0.$$

Dans tous les cas, on peut supposer $A = B = C = 1$ et de plus aussi

$$t^2 + Dz^2 = 1.$$

Alors, en prenant

$$(9) \quad u^2 + v^2 + \lambda^2 = 1,$$

φ garde une valeur constante. En portant les valeurs de u, v, w, h dans l'intégrale I , on obtient

$$I = \iint \int \sqrt{\pm D} \lambda (\lambda du dv + u dv d\lambda + v d\lambda du) (z dt - t dz).$$

Mais on a

$$\left| \begin{array}{cc} z & t \\ dz & dt \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} Dz & t \\ Ddz & dt \end{array} \right| = D(z dt - t dz)^2 = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & Ddz^2 + dt^2 \end{array} \right| = \pm ds^2;$$

donc

$$(10) \quad I = \int ds \int \int \lambda (\lambda du dv + u dv d\lambda + v d\lambda du) = \pi s,$$

s désignant la distance MN .

Le segment MN est quelconque, si la quadrique fondamentale est imaginaire, et il est tout entier à l'intérieur de la quadrique, si celle-ci est un ellipsoïde réel ou un hyperboloïde à deux nappes (quadrique réelle non réglée).

On déduit de là, dans le cas où la quadrique fondamentale est à génératrices imaginaires, que l'intégrale I , étendue à tous les plans qui coupent un arc de courbe donné (situé tout entier à

l'intérieur de la quadrique, si celle-ci est réelle), chacun de ces plans étant pris autant de fois qu'il a de points d'intersection avec l'arc, est égale à la LONGUEUR de cet arc de courbe (relativement à la quadrique fondamentale) multipliée par $\frac{\pi}{2}$.

On pourrait de même considérer l'intégrale étendue à une surface fermée convexe (située tout entière à l'intérieur de la quadrique fondamentale, si celle-ci est réelle).

L'intégrale I est la *dualistique* de l'intégrale J

$$(11) \quad J = \iiint \frac{\sqrt{\pm \Delta}(x dy dz dt + y dz dx dt + z dx dy dt - t dx dy dz)}{[f(x, y, z, t)]^2},$$

où Δ désigne le discriminant de la forme quadratique f . Cette intégrale, étendue à un certain ensemble de points, représente ce qu'on peut appeler le *volume* de cet ensemble relativement à la quadrique fondamentale. Si cette quadrique est à génératrices imaginaires, le *volume* de l'espace compris dans deux des dièdres opposés par l'arête formés par deux plans donnés (aucun des points de cet espace n'étant sur la quadrique, si celle-ci est réelle) est égal à l'*angle* des deux plans multiplié par π . On peut étendre aussi l'intégrale à tous les points d'où l'on peut mener un plan tangent à une portion de surface développable (limitée par deux de ses plans tangents); le *volume* obtenu est égal à la variation de l'*angle de contingence* de la développable, multipliée par $\frac{\pi}{2}$.

Revenons aux coordonnées rectangulaires ordinaires. Il y a une autre intégrale qui a une signification *métrique* : c'est l'intégrale double

$$\iint \frac{u dv dw + v dw du + w du dv}{(u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{3}{2}}},$$

étendue à un ensemble de plans satisfaisant à une même relation (tangents à une même surface). Cette intégrale n'est autre chose que l'*aire de l'image sphérique de la portion de surface considérée*, car u, v, w peuvent être considérées comme les coordonnées homogènes d'un point de la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine, le point où la normale au plan (u, v, w, h) perce cette sphère.

Cette intégrale, qui est égale aussi, comme on sait, à

$$\iint \frac{d\tau}{R_1 R_2},$$

$d\tau$ désignant l'élément de surface de l'enveloppe des plans considérés, et $\frac{1}{R_1 R_2}$ la *courbure totale* de cette surface, n'a pas d'analogue, quand on remplace le cercle imaginaire de l'infini par une quadrique quelconque.

§ 4.

Dans le paragraphe précédent, nous avons surtout considéré l'espace comme engendré par des plans; regardons-le maintenant comme engendré par des droites. Il existe aussi, dans ce cas, des intégrales multiples qui, étendues à certains ensembles de droites, éléments de l'espace, jouissent de propriétés invariantes, lorsqu'on imprime un même déplacement quelconque dans l'espace à toutes ces droites.

Trois intégrales jouissent de cette propriété, deux intégrales doubles et une intégrale quadruple. Nous nous occuperons des deux premières dans ce paragraphe.

Les intégrales doubles en question sont naturellement étendues à des droites dépendant de *deux* paramètres, c'est-à-dire faisant partie d'une *congruence*; elles se rapportent donc à un *pinceau* de droites d'une congruence.

Pour arriver à la notion de la première de ces intégrales, considérons les droites (en nombre simplement infini) qui limitent le pinceau et supposons pris, sur chacune d'elles, un point M, de manière à former une courbe fermée C (entourant le pinceau à la façon d'un anneau).

Si x, y, z sont les coordonnées d'un point M de cette courbe; α, β, γ les paramètres directeurs de la droite D correspondante, ds la différentielle de l'arc de la courbe C et, enfin, V l'angle de la droite D avec la tangente en M à la courbe C, considérons l'intégrale

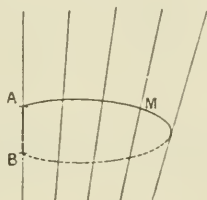
$$(1) \quad I = \int \frac{x dx + \beta dy + \gamma dz}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \int \cos V ds.$$

prise le long de la courbe C. Cette intégrale ne dépend pas de la courbe choisie C entourant le pinceau, car si l'on remplace x, y, z par $x + \varepsilon x, y + \varepsilon y, z + \varepsilon z$, l'intégrale I est simplement augmentée de

$$\int_{(C)} \frac{\varepsilon(x dx + y dy + z dz) + (x^2 + y^2 + z^2) d\varepsilon}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \int_C d(\varepsilon \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = 0.$$

On peut prendre, par exemple, pour C la courbe suivante. Partons d'un point A d'une des droites qui limitent le pinceau et considérons la trajectoire orthogonale issue de A des droites limites : en général elle ne reviendra pas au point A, mais coupera de nouveau la première droite en un certain point B différent de A. En prenant pour courbe C l'arc de courbe AMB ainsi dé-

Fig. 1.



terminé, augmenté du segment BA, la portion de l'intégrale I relative à l'arc AMB est nulle et celle qui est relative à BA n'est autre que la longueur de ce segment (fig. 1). On a donc

$$(2) \quad I = AB.$$

Il résulte de là que *la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale I s'annule, quel que soit le pinceau pris dans la congruence, est que la congruence soit formée des droites normales à une surface.*

La condition est nécessaire; cela est évident d'après la formule (2). Elle est suffisante, car si l'on se donne arbitrairement un point A sur une des droites D de la congruence, on peut déterminer sur toute autre droite D' un point M en considérant une surface réglée quelconque contenant D, D' et formée de droites de la congruence et cherchant la trajectoire orthogonale des génératrices de cette surface qui passe par A: elle coupe la droite D'

en un point M *indépendant* de la surface considérée, en vertu de (2) et de l'hypothèse que I est identiquement nulle. La surface lieu des points M est alors manifestement normale à toutes les droites de la congruence.

L'intégrale I jouit de la propriété que si l'on divise un pinceau de droites en deux pinceaux partiels, l'intégrale relative au pinceau total est égale à la somme des intégrales relatives aux pinceaux partiels. Il est donc à prévoir qu'elle peut se représenter au moyen d'une intégrale double étendue à toutes les droites du pinceau. Avant de montrer ce point, nous pouvons déduire de la considération de cette intégrale I une conséquence importante.

Supposons que l'on fasse *réfracter* les droites d'une congruence dans un milieu d'indice n suivant les lois ordinaires de la réfraction. Les droites réfractées forment une nouvelle congruence. Cherchons ce que devient l'intégrale I relative à un pinceau de la première congruence lorsqu'on passe au pinceau réfracté. Si l'on partage le pinceau en pinceaux infiniment petits, chacun d'eux peut être considéré comme réfracté sur un plan, le plan tangent à la surface de séparation au point d'intersection de cette surface avec une des droites du pinceau. En appelant i l'angle d'incidence des droites du pinceau sur ce plan et θ l'angle que fait la projection sur le plan de chaque droite avec la tangente à la courbe C d'intersection du plan et du pinceau, on a

$$I = \int \int_{(C)} \sin i \cos \theta \, ds = \sin i \int_{(C)} \cos \theta \, ds.$$

Dans le pinceau réfracté θ ne change pas, non plus que la courbe C, mais on a

$$\sin i' = \frac{1}{n} \sin i,$$

de sorte que

$$(3) \quad I = n I'.$$

La relation (3) étant vraie pour tout pinceau infiniment petit est évidemment vraie pour un pinceau quelconque :

L'intégrale I, relative à un pinceau de droites d'une congruence, se reproduit donc, divisée par n, pour le pinceau réfracté dans un milieu d'indice n.

Il résulte manifestement de là le théorème suivant, bien connu :

Étant donnée une congruence de droites normales à une surface, les droites résultant de leur réfraction dans un milieu d'indice n sont également normales à une surface.

Ces considérations mettent bien en évidence l'importance de l'intégrale I et par suite de l'intégrale double qui lui est égale. C'est cette intégrale double que nous allons maintenant déterminer. Pour cela, rappelons la définition des coordonnées plückériennes de la droite. Étant donnée une droite définie par deux points (x, y, z) et (x', y', z') , on appelle coordonnées de cette droite les six quantités $\alpha, \beta, \gamma, p, q, r$ déterminées par

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha = x - x', & \beta = y - y', & \gamma = z - z', \\ p = yz' - zy', & q = zx' - xz', & r = xy' - yx'; \end{cases}$$

ces six quantités sont liées par la relation

$$\alpha p + \beta q + \gamma r = 0;$$

de plus, si la droite est définie par les deux plans (u, v, w, h) et (u', v', w', h') , on a, à un facteur constant près,

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha = vw' - wv', & \beta = wu' - uw', & \gamma = uv' - vu', \\ p = uh' - hu', & q = vh' - hv', & r = wh' - hw'. \end{cases}$$

Cela étant, si l'on considère les droites d'une congruence, leurs coordonnées peuvent être regardées comme des fonctions de deux paramètres a et b , et l'intégrale de courbe I est de la forme

$$I = \int_{(C)} \Lambda da + B db;$$

elle peut se mettre, comme on sait, sous la forme d'une intégrale de surface

$$\iint \left(\frac{\partial B}{\partial a} - \frac{\partial \Lambda}{\partial b} \right) da db = \iint d\Lambda da + dB db.$$

Autrement dit, en revenant à l'expression (1) de I,

$$(6) \quad I = \iint \left(d \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx + d \frac{\beta}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dy + d \frac{\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dz \right).$$

C'est cette expression (6) qu'il s'agit de transformer en y introduisant les coordonnées de la droite.

En effectuant les calculs, on trouve, pour l'expression sous le signe $\int \int$,

$$\frac{[\beta(\beta dx - \alpha d\beta) + \gamma(\gamma dx - \alpha d\gamma)] dx + \dots + [\alpha(\alpha d\gamma - \gamma dx) + \beta(\beta d\gamma - \gamma d\beta)] dz}{(x^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Le numérateur de cette expression peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} & (\beta d\gamma - \gamma d\beta)(\beta dz - \gamma dy) \\ & + (\gamma dx - \alpha d\gamma)(\gamma dx - \alpha dz) + (\alpha d\beta - \beta dx)(\alpha dy - \beta dx). \end{aligned}$$

Or on a l'identité résultant de (4),

$$\beta z - \gamma y = p,$$

d'où

$$\beta dz - \gamma dy = dp + y d\gamma - z d\beta,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} & (\beta d\gamma - \gamma d\beta)(\beta dz - \gamma dy) \\ & = (\beta d\gamma - \gamma d\beta) dp + (\beta d\gamma - \gamma d\beta)(y d\gamma - z d\beta) \\ & = (\beta d\gamma - \gamma d\beta) dp + (\beta z - \gamma y) d\beta d\gamma \\ & = p d\beta d\gamma + \beta d\gamma dp + \gamma dp d\beta. \end{aligned}$$

En introduisant la notation

$$\omega_{\lambda\mu\nu} = \lambda d\mu d\nu + \mu d\nu d\lambda + \nu d\lambda d\mu,$$

on voit donc que

$$(7) \quad I = \int \int \frac{\omega_p \beta \gamma + \omega_q \gamma \alpha + \omega_r \alpha \beta}{(x^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

C'est l'intégrale double cherchée.

La condition nécessaire et suffisante pour que les droites d'une congruence soient normales à une surface peut donc s'écrire

$$\omega_p \beta \gamma + \omega_q \gamma \alpha + \omega_r \alpha \beta = 0.$$

Si par exemple on détermine la droite par sa trace sur le plan des xy et ses deux premiers paramètres directeurs, le troisième γ

étant pris égal à l'unité, on a

$$p = -y, \quad q = x, \quad r = xy - \beta x$$

et

$$\omega_p \beta y + \omega_q y x + \omega_r x \beta = (1 + \beta^2) dx dx + (1 + x^2) d\beta dy - x\beta (dx dy + d\beta dx).$$

Si donc on prend x et y pour paramètres de la congruence, l'équation cherchée est

$$(8) \quad -(1 + \beta^2) \frac{\partial x}{\partial y} + (1 + x^2) \frac{\partial \beta}{\partial x} - x\beta \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) = 0;$$

si au contraire on prend x et β , l'équation est

$$(9) \quad (1 + \beta^2) \frac{\partial x}{\partial \beta} - (1 + x^2) \frac{\partial y}{\partial x} - x\beta \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial x} \right) = 0.$$

Tous ces résultats peuvent être généralisés en remplaçant le cercle imaginaire de l'infini par une quadrique quelconque. Les mêmes raisonnements peuvent être faits et l'on arrive aux mêmes théorèmes généraux, en particulier *sur les congruences de droites normales à une surface qui conservent cette propriété après réfraction dans un milieu d'indice n .*

La deuxième intégrale double de l'espace réglé. — On peut arriver à la notion de cette intégrale d'une manière tout à fait analogue à celle qui nous a conduit à la première intégrale double. Considérons un pinceau de droites d'une congruence; les droites qui limitent ce pinceau engendrent une surface réglée. Considérons une *développable* quelconque fermée circonscrite à cette surface ⁽¹⁾; si M est un point de contact de la développable et de la surface réglée, désignons par V l'angle des deux génératrices de ces deux surfaces qui passent par M et par $d\theta$ l'angle du plan tangent à la développable avec le plan tangent infiniment voisin. Considérons enfin l'intégrale

$$(10) \quad J = \int \cos V d\theta$$

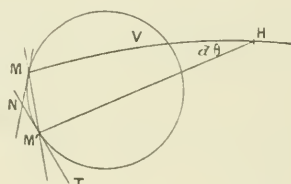
étendue à toute la courbe de contact. Cette intégrale est en quelque

(1) C'est à-dire telle que la courbe de contact soit une courbe fermée.

sorte la *dualistique* de la première, la courbe C étant ici remplacée par la développable, la tangente à la courbe C par la génératrice de la développable et enfin la différentielle de l'arc par la différentielle de l'angle de contingence.

On voit d'abord que l'on peut transporter les droites du pinceau parallèlement à elles-mêmes d'une façon quelconque, en conservant parallèles à eux-mêmes les plans tangents à la développable, sans que l'expression $\cos V d\theta$ change de valeur. On peut donc supposer que le pinceau est formé de droites passant par un point fixe. Si l'on prend la trace de la figure sur la sphère ayant pour centre ce point et pour rayon l'unité, le pinceau découpe une courbe sphérique C, le plan tangent à la développable un grand cercle tel que MH. Si M et M' sont deux points infiniment voisins de la courbe C, MH et M'H les grands cercles correspondants,

Fig. 2.



l'angle V n'est autre que MH et $d\theta$ est égal à l'angle MHM'. Or, figurons l'arc de grand cercle MM' et les deux arcs de grand cercle MN, M'N tangent en M et M' à la courbe C. Dans le triangle MM'H (fig. 2), on a

$$\cos V \sin H = \cos \widehat{MM'H} \sin \widehat{M'HH} + \sin \widehat{MM'H} \cos \widehat{M'HH} \cos H,$$

et si H est infiniment petit

$$\cos V d\theta = \sin (\widehat{MM'H} + \widehat{M'HH}).$$

Or on a

$$\widehat{MM'H} + \widehat{M'HH} = \widehat{NMH} - \widehat{NMM'} + \pi - (\widehat{FM'H} + \widehat{NM'M}),$$

on, en appelant $d\epsilon$ l'angle de contingence des deux arcs de grand cercle MN, M'N,

$$\widehat{MM'H} + \widehat{M'HH} = d\widehat{NMH} + \pi - d\epsilon.$$

d'où finalement, en posant

$$z = \widehat{NMH},$$

on a

$$\cos V \, d\theta = dz + dz.$$

En intégrant le long de la courbe, z reprend sa valeur par hypothèse lorsqu'on revient au point de départ et il reste

$$J = \int dz.$$

Mais, d'après le paragraphe 2, la variation de l'angle de continuité est égale à l'aire de la surface de la sphère extérieure à la courbe C . On peut donc prendre (§ 2)

$$(11) \quad J = \int \int \frac{\alpha \, d\beta \, d\gamma + \beta \, d\gamma \, dz - \gamma \, dz \, d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Telle est la deuxième intégrale double, que nous aurions naturellement pu écrire immédiatement, mais dont l'analogie avec la première intégrale I est mise en évidence.

La condition pour que cette intégrale soit nulle, quel que soit le pinceau choisi dans la congruence, est, en supposant γ non identiquement nul et par suite, si l'on veut, égal à 1,

$$dz \, d\beta = 0,$$

c'est-à-dire que α, β, γ sont fonctions d'un seul paramètre. Les droites de la congruence sont donc toutes parallèles aux génératrices d'un même cône.

La condition nécessaire et suffisante pour que, étant donnée une congruence de droites, on puisse faire passer par chaque droite D de cette congruence un plan P tel que l'intersection de ce plan P et d'un quelconque des plans infiniment voisins soit perpendiculaire à la droite D, est que toutes les droites de la congruence soient parallèles aux génératrices d'un même cône.

C'est l'analogie des congruences de droites normales à une surface.

Expression des intégrales I et J dans un système quelconque de coordonnées. — On peut arriver à ces expressions en se donnant l'équation tangentielle du cercle imaginaire de l'infini, calculant les deux intégrales de courbe et les transformant en intégrales doubles. Pour éviter les calculs, je me borne à prendre *a priori* leurs valeurs définitives et vérifier qu'elles sont égales aux intégrales doubles I et J exprimées en coordonnées rectangulaires.

Prenons d'abord la seconde. Soient u_1, u_2, u_3, u_4 les coordonnées d'un plan et

$$(12) \quad \varphi(u_1, u_2, u_3, u_4) = \Sigma A_{ik} u_i u_k = 0$$

l'équation tangentielle du cercle imaginaire de l'infini. Soit enfin $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ la *forme adjointe* de φ , qui, égalée à zéro, représente l'équation du plan double de l'infini. Étant donnée une droite définie par deux plans u et v , nous prendrons pour *coordonnées* de la droite les six expressions

$$q_{ik} = u_i v_k - v_i u_k = -q_{ki} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

liées par la relation

$$q_{12} q_{34} + q_{23} q_{14} + q_{31} q_{24} = 0.$$

Posons enfin

$$(13) \quad \begin{cases} d\omega_1 = u_2 dq_{34} + u_3 dq_{12} + u_4 dq_{23}, \\ d\omega_2 = u_1 dq_{43} + u_4 dq_{31} + u_3 dq_{14}, \\ d\omega_3 = u_1 dq_{24} + u_2 dq_{41} + u_4 dq_{12}, \\ d\omega_4 = u_1 dq_{32} + u_3 dq_{21} + u_2 dq_{13}. \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que l'on a, par exemple,

$$u_2 q_{34} + u_3 q_{12} + u_4 q_{23} = 0,$$

d'où

$$d\omega_1 = -(q_{34} du_2 + q_{12} du_3 + q_{23} du_4) = - \begin{vmatrix} du_2 & du_3 & du_4 \\ u_2 & u_3 & u_4 \\ v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix}.$$

Nous poserons de même

$$d\omega'_1 = v_2 dq_{34} + v_3 dq_{12} + v_4 dq_{23},$$

et les formules analogues.

Enfin posons

$$(14) \quad \begin{cases} \Phi(q_{ik}) = \varphi(u_1, u_2, u_3, u_4) \varphi(v_1, v_2, v_3, v_4) \\ \quad - (v_1 \varphi'_{u_1} + v_2 \varphi'_{u_2} + v_3 \varphi'_{u_3} + v_4 \varphi'_{u_4})^2, \end{cases}$$

les φ'_u désignant toujours les demi-dérivées de φ . Le second membre ne dépend manifestement que des $u_i v_k - v_i u_k$, et, égalé à zéro, il représente l'équation du complexe des droites isotropes (tangentes à la surface $\varphi = 0$). On a

$$\Phi(q_{ik}) = \Sigma (\Lambda_{ik} \Lambda_{kl} - \Lambda_{il} \Lambda_{kl}) q_{ik} q_{kl}.$$

Considérons alors l'intégrale double

$$(15) \quad \iint \frac{d\omega'_1 df'_{\omega_1} + d\omega'_2 df'_{\omega_2} + d\omega'_3 df'_{\omega_3} + d\omega'_4 df'_{\omega_4}}{[\Phi(q_{12}, \dots, q_{34})]^{\frac{3}{2}}}.$$

On vérifie immédiatement qu'au numérateur les u et les v n'entrent que par les combinaisons $u_i v_k - v_i u_k$. De plus le numérateur est du premier degré par rapport aux coefficients de f , c'est-à-dire du troisième degré par rapport à ceux de φ , et il en est de même du dénominateur; l'expression est donc homogène et de degré zéro par rapport aux Λ ; elle ne dépend donc que de l'équation

$$\varphi(u) = 0,$$

et non de la forme φ elle-même.

Si nous effectuons maintenant sur les u et les v une même substitution linéaire

$$(16) \quad u_i = \sum_{k=1}^{k=4} \lambda_{ik} u'_k,$$

la forme φ devient une certaine forme φ' et Φ se change dans la forme correspondante Φ' . Quant à la forme adjointe f de φ , elle devient la forme adjointe f' de φ' par la substitution

$$(17) \quad x_i = \sum_{k=1}^{k=4} \Lambda_{ik} x'_k \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

où Λ_{ik} désigne le mineur du déterminant de la substitution (16).

relatif à λ_{ik} (1). Or, par la substitution (16), il est facile de voir que $d\omega_1, d\omega_2, d\omega_3, d\omega_4$ subissent précisément la substitution (17), de même $d\omega'_1, \dots, d\omega'_4$. Il en résulte que le numérateur de l'intégrale (15) se reproduit, sauf que f est remplacé par f' .

L'intégrale (15) est donc invariante par une transformation homographique quelconque.

Or, pour

$$\varphi = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,$$

on a

$$\Phi = q_{23}^2 + q_{31}^2 + q_{12}^2$$

et

$$f = x_3^2,$$

de sorte que l'intégrale devient, au signe près,

$$\begin{aligned} & \int \int \frac{d\omega_3 d\omega'_4}{(q_{23}^2 + q_{31}^2 + q_{12}^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \int \int \frac{q_{12} dq_{23} dq_{31} + q_{23} dq_{31} dq_{12} + q_{31} dq_{12} dq_{23}}{(q_{23}^2 + q_{31}^2 + q_{12}^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

ou, avec nos notations précédentes,

$$J = \int \int \frac{x dx^2 dx' + \beta dx dx' + \gamma dx d\beta}{(x^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'intégrale (15) est donc égale à J.

Remarque. — On pourrait supposer que φ est une forme quadratique quelconque, et l'on a alors une intégrale double de l'espace réglé, où cette quadrique serait quadrique fondamentale.

(1) En effet, $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ n'est autre chose que le discriminant de la forme

$$\varphi(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = \varphi(u_1, u_2, u_3, u_4) + 2(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4) u_5.$$

Par la substitution (16), à laquelle on ajoute $u'_5 = \frac{u_5}{\Delta}$, on obtient une substitution de déterminant 1 qui change, d'après (17), la forme φ en une forme de même discriminant

$$\varphi' = \varphi(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) + 2(x'_1 u'_1 + x'_2 u'_2 + x'_3 u'_3 + x'_4 u'_4) u'_5$$

dont f se change par (17) en f' .

Cette intégrale double est encore égale à l'expression (10),

$$J = \int \cos V \, d\theta,$$

définie de la même façon qu'en Géométrie ordinaire.

Si l'on remplace maintenant dans (15) les coordonnées tangentielles par les coordonnées ponctuelles, c'est-à-dire les u par les x , et les q_{ik} par

$$p_{ik} = x_i y_k - y_i x_k$$

(d'ailleurs $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}$ sont proportionnels à $q_{34}, q_{42}, q_{23}, q_{14}, q_{31}, q_{12}$), on a une nouvelle intégrale double qui jouit de propriétés invariantes. Mais cette intégrale n'est définie que si la forme $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ [qui remplace $\varphi(u)$] est réductible à une somme d'*au moins* trois carrés indépendants, et dans le cas de la Géométrie ordinaire $f = x_4^2$. Mais remarquons que le dénominateur $F(p_{ik})$ qui, égalé à zéro, représente l'équation du complexe des tangentes à la surface $f = 0$, peut aussi bien être calculé en partant de l'équation tangentielle $q = 0$ de cette surface, et dans ces conditions l'intégrale conserve un sens en Géométrie ordinaire.

Si donc $\Phi(p_{ik})$ désigne le premier membre de l'équation du complexe des droites isotropes (calculé au moyen du premier membre φ de l'équation tangentielle du cercle imaginaire de l'infini), on peut considérer l'intégrale double

$$(18) \quad \iint \frac{d\varpi'_1 d \frac{\partial \varphi}{\partial \varpi_1} + d\varpi'_2 d \frac{\partial \varphi}{\partial \varpi_2} + d\varpi'_3 d \frac{\partial \varphi}{\partial \varpi_3} + d\varpi'_4 d \frac{\partial \varphi}{\partial \varpi_4}}{[\Phi(p_{12}, \dots, p_{34})]^{\frac{3}{2}}},$$

où, par exemple,

$$\begin{aligned} d\varpi_1 &= x_2 dp_{34} + x_3 dp_{42} + x_4 dp_{23}, \\ d\varpi'_1 &= y_2 dp_{34} + y_3 dp_{42} - y_4 dp_{23}. \end{aligned}$$

Cette intégrale conserve sa valeur (à un facteur constant près) par toute transformation homographique.

Or, si l'on se place en coordonnées rectangulaires, on peut prendre

$$\varphi = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,$$

$$\Phi = (u_2 v_3 - v_2 u_3)^2 + (u_3 v_1 - v_3 u_1)^2 + (u_1 v_2 - v_1 u_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2,$$

et l'intégrale est, au signe près,

$$\int \int \frac{d\varpi_1 d\varpi'_1 + d\varpi_2 d\varpi'_2 + d\varpi_3 d\varpi'_3}{(p_{11}^2 + p_{22}^2 + p_{33}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En calculant $d\varpi_1 d\varpi'_1$, on trouve

$$d\varpi_1 d\varpi'_1 = p_{23} dp_{34} dp_{42} + p_{34} dp_{42} dp_{23} + p_{42} dp_{23} dp_{34} = \omega_{p_{23}, p_{34}, p_{42}}.$$

En revenant à nos anciennes notations, nous retrouvons

$$I = \int \int \frac{\omega_{p\beta\gamma} + \omega_{q\gamma\alpha} + \omega_{r\alpha\beta}}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{3}{2}}},$$

qui est bien la première des intégrales doubles considérées au commencement de ce paragraphe.

La formule (18) permet donc d'écrire, en coordonnées tétraédriques, la condition pour que les droites d'une congruence soient normales à une surface, connaissant l'équation tangentielle $\varphi = 0$ du cercle imaginaire de l'infini.

Il est évident aussi qu'on peut remplacer dans cette formule φ par une forme quadratique quelconque, et l'on a alors l'intégrale de courbe

$$\int \cos V ds,$$

V et s étant définis par rapport à la quadrique fondamentale $\varphi = 0$. Cette intégrale se reproduit à un facteur constant près, lorsque les droites se *réfractent* dans un milieu d'indice donné. *Le théorème relatif aux congruences de normales à une surface qui, par réfraction, conservent la même propriété, s'étend donc naturellement avec une quadrique fondamentale quelconque.*

§ 5.

Nous avons trouvé deux intégrales doubles exprimant des propriétés métriques de pineaux de droites. Désignons symboliquement par dI et dJ les quantités sous le signe $\int \int$ de ces deux

intégrales. On pourrait considérer l'intégrale quadruple

$$\iiint\int dI, \quad$$

étendue à un ensemble de droites dépendant de quatre paramètres et elle exprimerait également une propriété métrique de cet ensemble. Dans le cas où l'on prend une quadrique fondamentale quelconque, cette intégrale quadruple existe en effet; mais, en Géométrie ordinaire, on vérifie, par un calcul simple, qu'elle est identiquement nulle. C'est, en effet,

$$\iiint\int \frac{[(p \, d\beta \, d\gamma + \beta \, d\gamma \, dp + \gamma \, dp \, d\beta + \dots + r \, dx \, d\beta + \alpha \, d\beta \, dr + \beta \, dr \, dx)(x \, d\beta \, d\gamma + \dots + \gamma \, dx \, d\beta)]}{(x^2 + \beta^2 + \gamma^2)^3}.$$

Si l'on fait $\gamma = 1$, ce qui est permis, il reste,

$$\iiint\int \frac{(dp \, d\beta + dx \, dq + r \, dx \, d\beta + \alpha \, d\beta \, dr + \beta \, dr \, dx) \, dx \, d\beta}{(x^2 + \beta^2 + \gamma^2)^3},$$

expression identiquement nulle, puisque, en effectuant le produit symbolique du numérateur, chaque produit partiel contient deux différentielles identiques (dx ou $d\beta$).

Néanmoins il existe une intégrale quadruple de l'espace réglé, invariante par une transformation de coordonnées quelconques. Désignons toujours par $\Phi(p_{ik})$ le premier membre de l'équation du complexe des droites isotropes; par P le premier membre de l'équation du plan de l'infini, et par f le premier membre de l'équation d'une sphère quelconque et considérons

$$(1) \quad \iiint\int \frac{[P(dw'_1, dw'_2, dw'_3, dw'_4) P(dw_1, dw_2, dw_3, dw_4) \times (dw'_1 df'_{\omega_1} + dw'_2 df'_{\omega_2} + dw'_3 df'_{\omega_3} + dw'_4 df'_{\omega_4})]}{[\Phi(p_{ik})]^3},$$

où les dw_i, dw'_i sont déterminés par les formules (13)

$$\begin{aligned} dw_1 &= u_2 \, dq_{34} + u_3 \, dq_{12} + u_4 \, dq_{23} = u_2 \, dp_{12} + u_3 \, dp_{13} + u_4 \, dp_{14}, \\ dw'_1 &= v_2 \, dq_{34} + v_3 \, dq_{12} + v_4 \, dq_{23} = v_2 \, dp_{12} + v_3 \, dp_{13} + v_4 \, dp_{14}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Cette expression est homogène et de degré zéro en p_{ik} . Par une substitution linéaire, elle conserve la même forme. Elle est indé-

pendante de la sphère choisie, car, si l'on remplace f par $f + PQ$, le numérateur ne change pas. Enfin, si l'on multiplie les p_{ik} par un même facteur, fonction quelconque des quatre paramètres des droites, l'expression ne change pas non plus ⁽¹⁾.

L'intégrale double (1) représente donc, à un facteur près, une quantité métrique attachée à tout ensemble de droites (dépendant de quatre paramètres).

En coordonnées rectangulaires, on a

$$P = x_4, \quad f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad \Phi = p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2,$$

et l'intégrale devient

$$A = \iiint \frac{d\omega_1 d\omega'_1 (d\omega_1 d\omega'_1 + d\omega_2 d\omega'_2 + d\omega_3 d\omega'_3)}{(x^2 + \beta^2 + \gamma^2)^3}.$$

Or

$$d\omega_1 d\omega'_1 = p_{12} dp_{13} dp_{14} + p_{13} dp_{14} dp_{12} + p_{14} dp_{12} dp_{13} = \omega_{p_{12}, p_{13}, p_{14}},$$

$$d\omega_2 d\omega'_2 = p_{21} dp_{24} dp_{23} + p_{24} dp_{23} dp_{21} + p_{23} dp_{21} dp_{24} = \omega_{p_{23}, p_{21}, p_{24}},$$

$$d\omega_3 d\omega'_3 = p_{31} dp_{32} dp_{34} + p_{32} dp_{34} dp_{31} + p_{34} dp_{31} dp_{32} = \omega_{p_{31}, p_{32}, p_{34}},$$

$$d\omega_4 d\omega'_4 = p_{41} dp_{43} dp_{42} + p_{43} dp_{42} dp_{41} + p_{42} dp_{41} dp_{43} = \omega_{p_{41}, p_{43}, p_{42}}.$$

Finalement, et en reprenant nos anciennes notations,

$$(2) \quad A = \iiint \frac{\omega_{\alpha\beta\gamma}(\omega_{\alpha q r} + \omega_{\beta r p} + \omega_{\gamma p q})}{(x^2 + \beta^2 + \gamma^2)^3}.$$

Cas particulier. — Supposons que nous étendions l'intégrale A à l'ensemble des droites qui coupent une aire plane donnée, qu'on peut toujours supposer dans le plan des xy . Alors, en prenant pour paramètres d'une de ces droites les coordonnées de son point d'intersection avec le plan des xy et ses deux premiers paramètres directeurs α et β , le troisième γ étant pris égal à l'unité, on a

$$\alpha = x, \quad \beta = y, \quad \gamma = 1, \quad p = -y, \quad q = x, \quad r = xy - \beta x$$

⁽¹⁾ Cela résulte de ce que le numérateur est un produit (symbolique) de deux facteurs dont chacun contient les variables p par des combinaisons de la forme $\omega_{\lambda\mu\nu} = \lambda d\mu d\nu + \mu d\nu d\lambda + \nu d\lambda d\mu$, et cette expression se reproduit multipliée par h^3 , si l'on remplace λ, μ, ν par $h\lambda, h\mu, h\nu$, h étant quelconque.

et

$$\omega_{xqr} = x^2 dx dy - \alpha x dx d\beta + \alpha x dy dz + x^2 dz d\beta,$$

$$\omega_{\beta rp} = \beta^2 dx dy - \beta y dx d\beta + \beta y dy dz + y^2 dz d\beta,$$

$$\omega_{\gamma pq} = dx dy,$$

$$\omega_{\alpha\beta\gamma} = dx d\beta,$$

d'où

$$\Lambda = \iiint \frac{dx d\beta dx dy}{(1+x^2+\beta^2)^2} = S \iint \frac{dx d\beta}{(1+x^2+\beta^2)^2},$$

S désignant l'aire de la portion considérée du plan des $x\gamma$, et l'intégrale double étant étendue à tout le plan des $\alpha\beta$. En calculant cette intégrale, on trouve

$$\Lambda = \pi S.$$

On déduit de là le théorème suivant :

L'intégrale quadruple Λ , étendue à toutes les droites qui coupent une portion de surface, chacune d'elles étant prise autant de fois qu'elle a de points d'intersection avec celle-ci, est égale au produit de π par l'aire de cette portion de surface.

En particulier, l'intégrale Λ , étendue à toutes les droites qui coupent une surface fermée convexe, est égale au produit de $\frac{\pi}{2}$ par l'aire totale de cette surface.

Étant donnée une surface fermée convexe, nous sommes donc arrivés à la notion de trois invariants métriques de cette surface :

1° *Le volume de l'espace compris à l'intérieur de la surface, invariant de dimension 3 par rapport à la longueur, qui s'exprime au moyen d'une intégrale triple de l'espace ponctuel*

$$\iiint dx dy dz,$$

étendue à tous les points à l'intérieur de la surface ;

2° *L'aire de la surface, invariant de dimension 2, qui s'exprime au moyen d'une intégrale quadruple de l'espace réglé*

$$\frac{2}{\pi} \iiint \frac{\omega_{\alpha\beta\gamma} (\omega_{xqr} + \omega_{\beta rp} + \omega_{\gamma pq})}{(x^2 + \beta^2 + \gamma^2)^3},$$

étendue à toutes les droites qui coupent la surface ;

3° Un autre invariant de dimension 1, qui s'exprime au moyen d'une intégrale triple de l'espace tangentiel

$$\iiint \frac{u \, dv \, dw \, dh + v \, dw \, du \, dh + w \, du \, dv \, dh - h \, du \, dv \, dw}{(u^2 + v^2 + w^2)^2},$$

étendue à tous les plans qui coupent la surface. Cette dernière intégrale est égale à $4\pi R$ pour une sphère de rayon R ; à $\pi(a + b + c)$ pour un parallélépipède rectangle de côtés a, b, c ; à $\frac{\pi}{2}p$ pour un disque plan de périmètre p .

On pourrait appeler *périmètre de la surface fermée* l'intégrale précédente multipliée par $\frac{2}{\pi}$. Le périmètre d'une sphère serait alors égal à $8R$, et celui d'un cylindre droit au périmètre de la base augmenté du double de la hauteur.

Il n'y a pas, dans l'espace tangentiel, d'autre intégrale multiple de la forme considérée qui soit invariante par tout déplacement dans l'espace, que les deux intégrales triple et double que nous avons considérées. Il n'y a pas non plus, dans l'espace réglé, d'autre intégrale multiple jouissant des mêmes propriétés que les trois intégrales, deux doubles considérées dans le § 4, et une quadruple considérée dans le § 5. D'ailleurs toutes ces intégrales multiples peuvent être trouvées par des résolutions d'équations différentielles. Ce sont, en effet, en employant une expression due à M. Poincaré, des *invariants intégraux* relatifs, les premiers au groupe de transformations des plans de l'espace, les seconds au groupe des droites de l'espace, lorsqu'on déplace, d'une façon quelconque, cet espace en lui-même. D'après les méthodes de M. Lie, on a le moyen de trouver tous ces *invariants intégraux*.

Ces considérations sont naturellement susceptibles d'extension dans plusieurs sens; on peut, par exemple, substituer au groupe des mouvements un groupe quelconque et, prenant une famille de courbes ou de surfaces invariante par ce groupe, considérer des intégrales multiples de l'espace considéré comme engendré par les courbes ou les surfaces de cette famille; certaines de ces intégrales pourront conserver leur valeur en effectuant sur les courbes ou les surfaces considérées une transformation quelconque du groupe. Par exemple, on peut considérer la famille des sphères

de l'espace relativement au groupe à 10 paramètres des transformations qui conservent les angles ; ou, au lieu des sphères, on peut considérer les cercles de l'espace, relativement au même groupe. On a alors des quantités attachées à certains ensembles de sphères ou de cercles, et qui font corps avec ces ensembles vis-à-vis de toute transformation qui conserve les angles.

**DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE M. VASCHY
SUR UNE DISTRIBUTION QUELCONQUE DE VECTEUR ;**

Par M. LAROSE.

1. M. Carvallo a donné (*Bull. de la Soc. mathém.*, t. XVIII; 1890) la généralisation suivante de la formule de Green :

Soit un champ U limité par une surface S ; soient φ un opérateur linéaire fonction du vecteur qui va de l'origine au point considéré, ν l'unité de normale intérieure, ∇ l'opérateur d'Hamilton ; on a l'identité

$$(1) \quad \int \int_S \varphi(\nu) d\sigma + \int \int \int_U \varphi(\nabla) dv = 0,$$

les dérivations de ∇ portant sur les éléments de φ .

On passe donc de l'intégrale double à l'intégrale triple en remplaçant ν par ∇ .

2. Soit h un vecteur défini en chaque point du champ U ; si φ est une fonction de h tel que l'intégrale $\int \int \varphi(\nu) d\sigma$, prise le long d'une sphère Σ , soit à un facteur numérique près égale à la valeur moyenne du vecteur h sur la sphère, en appliquant l'identité (1) au volume compris entre S et Σ , et supposant Σ infiniment petit, on aura

$$(2) \quad 4\pi h + \int \int_S \varphi(\nu) d\sigma + \int \int \int \varphi(\nabla) dv = 0;$$

cette identité sera analogue dans l'espace à l'identité de Cauchy dans le plan pour le calcul des résidus.

3. On est conduit à une expression de l'opérateur φ par les considérations physiques suivantes :

La force exercée sur une masse 1 placée en O par une masse m située en M est, d'après la loi de Newton, égale à $-\frac{\alpha m}{r^2}$, r étant la distance OM et α le vecteur unité de direction OM.

Si en M on a un élément de courant m_v , ou masse laplacienne, la force exercée en O sera $-V\left(\frac{\alpha}{r^2} \cdot m_v\right)$.

La résultante des deux forces sera donc $-V\left(\frac{\alpha}{r^2} \cdot q\right)$, q désignant un quaternion dont le scalaire est la masse newtonienne, le vecteur la masse laplacienne.

Sur la sphère Σ de centre O, on a $\alpha = \nu$ (ν normale intérieure au volume U); donc

$$-\int \int_{\Sigma} V\left(\frac{\alpha}{r^2} \cdot \nu \cdot h\right) ds = \int \int_{\Sigma} h \frac{ds}{r^2} = 4\pi h.$$

Nous poserons $\varphi(\nu) = -V\left(\frac{\alpha}{r^2} \cdot \nu \cdot h\right)$ et l'identité (2) s'écrira

$$4\pi h = \int \int_S V\left(\frac{\alpha}{r^2} \nu h\right) d\tau + \int \int V\left(\frac{\alpha}{r^2} \nabla h\right) dv.$$

Les dérivations du ∇ de l'intégrale triple s'appliquant aux éléments des deux vecteurs h et $\frac{\alpha}{r^2}$,

$$V\left(\frac{\alpha}{r^2} \nabla h\right) = V\left(\frac{\alpha}{r^2} \overline{\nabla h}\right) + V\left(h \nabla \frac{\alpha}{r^2}\right);$$

or on a $\nabla \frac{\alpha}{r^2} = 0$. Il suffit donc d'appliquer les dérivations de ∇ au vecteur h .

Cette identité exprime le théorème signalé par M. Vaschy :

Le champ d'un vecteur quelconque h peut être considéré comme produit par la superposition d'un champ de masses newtoniennes et d'un champ de masses laplaciennes réparties dans le volume U et sur la surface limite S du champ.

La loi de distribution est la suivante :

$$\begin{aligned} 4\pi\varphi + S\nabla h &= 0, & 4\pi\mu + V(\nabla h) &= 0, \\ 4\pi\tau + S\nu h &= 0, & 4\pi\tau + V(\nu h) &= 0, \end{aligned}$$

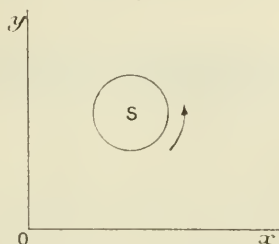
ϱ, τ désignant les densités de masses newtoniennes de volume et de surface, μ, τ les densités de masses laplaciennes de volume et de surface.

4. L'identité démontrée ci-dessus peut être considérée comme une généralisation de la formule de Cauchy dans le plan pour le calcul des résidus, mais elle est plus générale dans l'espace que l'identité

$$2i\pi f(a) = \int \frac{f(z) dz}{z-a}$$

ne l'est dans le plan, puisqu'elle renferme une intégrale triple.

Fig. 1.



La formule de Cauchy résulte immédiatement de l'identité

$$\int_C (X + iY) (dx + i dy) = i \int_S \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (X + iY) dS,$$

$$X + iY = f(z),$$

$$x + iy = z.$$

X, Y sont des fonctions de x, y réelles, continues et uniformes à l'intérieur de l'aire S d'intégration.

Les vecteurs représentatifs d'imaginaires considérés par Cauchy sont assujettis à la relation symbolique

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (X + iY) = 0,$$

qui exprime que la dérivée $f'(z)$ est indépendante de la direction choisie autour du point considéré, et cette relation fait disparaître l'intégrale double.

L'opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ joue dans le plan le rôle de l'opérateur d'Hamilton dans l'espace.

La généralisation immédiate de la formule de Cauchy serait donc

$$4\pi h = \iint V\left(\frac{\alpha}{r^2} \cdot \nu \cdot h\right) dS,$$

le vecteur h étant assujetti aux équations différentielles

$$\nabla h = 0.$$

Cette identité symbolique s'interprète géométriquement.

Donnons, par exemple, au vecteur h la signification du déplacement du point (x, y, z) .

$\nabla h = 0$ exprimera qu'autour du point considéré il n'y a ni déformation, ni rotation; le mouvement est un simple mouvement de translation.

GÉNÉRALISATION ET EXTENSION A L'ESPACE DU THÉORÈME DES RÉSIDUS DE CAUCHY;

Par M. E. CARVALLO.

1. Dans la théorie des fonctions analytiques, $f(x)$ est une imaginaire, fonction de l'imaginaire x . Si, avec Cauchy, on représente les imaginaires par des vecteurs allant de l'origine aux divers points d'un plan, les résultats analytiques s'interprètent géométriquement : f est un vecteur; il est fonction du vecteur x ou, plus simplement, du point qui est à l'extrémité de ce vecteur issu de l'origine. On considère l'intégrale de l'expression $\frac{f(x)}{x-a}$ le long d'un contour formé de deux lignes : un cercle σ de rayon infiniment petit, qui a pour centre le point a , puis une ligne s qui renferme le cercle σ . Pour avoir la formule de Cauchy, il suffit de transformer cette intégrale de ligne en une intégrale étendue à l'aire v , qui est comprise entre les lignes σ et s . Telle est la méthode que nous allons étendre à l'espace.

2. La variable indépendante x décrira, non plus un plan, mais l'espace. Pour plus de généralité, $f(x)$ sera une entité quelconque, géométrique ou non, déterminée en chaque point x ⁽¹⁾.

(1) Par exemple, une des entités considérées par Hamilton ou Grassmann, dans leurs méthodes de calcul géométrique, une masse, un vecteur, un couple, un point, un plan, une force.

Les champs d'intégration seront la surface d'une sphère τ , une surface s qui enveloppe τ , enfin le volume v compris entre les deux surfaces τ et s . Le vecteur $\frac{1}{x-a}$ (qui dérive du potentiel logarithmique) sera remplacé par le vecteur newtonien, représenté par la formule $\frac{z}{r^2}$, où z est le vecteur égal à l'unité et porté du point a vers le point x ; r est la distance de ces deux points. Ainsi, nous aurons à intégrer l'expression $\frac{z}{r^2} f(x)$ le long des surfaces τ et s . Pour ces surfaces, considérons les normales v et v_1 , égales à l'unité et dirigées vers l'intérieur du volume v . L'intégrale de surface envisagée sera

$$\int_{\tau} \left[v \cdot \frac{z}{r^2} f \right] d\tau + \int_s \left[v_1 \cdot \frac{z}{r^2} f \right] ds.$$

La signification des symboles v , $\frac{z}{r^2}$, f a été expliquée. Quant au crochet $\left[v \cdot \frac{z}{r^2} f \right]$, c'est une fonction de ces trois symboles; mais sa signification demeure arbitraire et nous pouvons en disposer à notre gré, pourvu, toutefois, que la définition qu'on adoptera permette la transformation que nous avons en vue. Or, d'après un théorème général que j'ai établi antérieurement ⁽¹⁾, sur la transformation des intégrales doubles en intégrales triples, il suffit que la fonction $\left[v \cdot \frac{z}{r^2} f \right]$ soit linéaire en v ; elle peut d'ailleurs représenter tel élément qu'on voudra, géométrique ou non. La règle est simple: pour avoir l'élément de l'intégrale triple, il suffit de remplacer, dans l'élément de l'intégrale double, le vecteur v par le vecteur symbolique d'Hamilton

$$\nabla = I_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + I_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + I_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

La formule de réduction est donc ici

$$(1) \quad \int_{\tau} \left[v \cdot \frac{z}{r^2} f \right] d\tau + \int_s \left[v_1 \cdot \frac{z}{r^2} f \right] ds + \int_v \left[\nabla \cdot \frac{z}{r^2} f \right] dv = 0.$$

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XVIII; 1890.

PREMIÈRE APPLICATION DE LA FORMULE (1). — Cette formule (1), d'une grande généralité, contient des résultats géométriques nombreux ; mais, si l'on veut rendre manifeste l'analogie de la formule (1) avec celle de Cauchy, il convient de particulariser la signification du crochet de façon que, sur la sphère σ , $[\alpha f]$ représente f à un facteur numérique près. Or, sur cette sphère, ν coïncide avec α ; il suffit donc d'attribuer au crochet une valeur égale à f multiplié par le *produit intérieur* de Grassmann $\alpha|\nu$ ⁽¹⁾

$$[\alpha f] = \alpha|\nu \cdot f.$$

Le premier terme de la formule (1) devient

$$\int_{\sigma} \frac{\nu|\nu}{r^2} f(x) d\sigma = 4\pi f(a).$$

Le troisième terme se simplifie aussi, car les dérivations de ∇ portant sur $\frac{\alpha}{r^2}$ donnent un terme nul ; il ne reste qu'à faire porter les dérivations sur f . La formule (1) ainsi particularisée s'écrit, en remplaçant la normale intérieure ν_i par la normale extérieure changée de signe $-\nu$,

$$4\pi f(a) = \int_s \frac{\alpha|\nu}{r^2} \cdot f ds - \int_v \frac{1}{r^2} \cdot \alpha|\nabla \cdot f dv.$$

Dans le second membre, $\frac{\alpha|\nu}{r^2} ds$ représente la projection $d\omega$ de l'élément d'aire ds sur la sphère de rayon 1. Pour l'intégrale triple, $\alpha|\nabla f$ est la dérivée de f dans la direction α ; c'est $\frac{df}{dr}$. La formule s'écrit donc simplement, dans la notation cartésienne,

$$(2) \quad 4\pi f(a) = \int_s f(x) d\omega - \int_v \frac{1}{r^2} \frac{df}{dr} dv.$$

Comme celle de Cauchy, la formule (2) établit un lien entre la valeur de f au point a et l'ensemble des valeurs de f dans un domaine qui enveloppe le point a . Elle s'applique à toute grandeur f , fonction du point x , pourvu toutefois que f satisfasse aux condi-

(1) C'est le produit $\alpha|\nu = \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2 + \alpha_3\nu_3$, des deux vecteurs par le cosinus de leur angle.

tions d'application du théorème relatif à la transformation des intégrales, savoir : *f doit admettre trois dérivées dans tout l'espace intérieur à s.*

DEUXIÈME APPLICATION DE LA FORMULE (1). — Dans le cas où f est un vecteur, on peut encore donner au crochet la signification suivante :

$$[\nu z f] = z.\nu|f - \nu.z|f + z|\nu.f,$$

car, ν et z coïncidant le long de la sphère σ , les deux premiers termes du second membre se détruisent et l'intégrale suivant σ donne encore $4\pi f(a)$. Le long de s , la même réduction n'a pas lieu, mais on peut grouper les deux derniers termes. Leur somme se représente, dans la notation de Grassmann, par $[[z.](\nu f)]$. Dans cette notation, $|(\nu f)$ représente un vecteur perpendiculaire au plan (νf) et mesuré par le même nombre que l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs ν et f . Posons

$$\nu|f = 4\pi\mu, \quad (\nu|f) = 4\pi k;$$

μ est un nombre et k un vecteur. L'élément de l'intégrale suivant la surface s , divisé par 4π , sera

$$\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\nu z f}{r^2} \right] ds = \mu \frac{z}{r^2} ds + \left[\left[\frac{z}{r^2} k \right] \right] ds.$$

Le premier terme représente l'action d'une couche de masse newtonienne de densité superficielle μ sur un point de masse 1 situé en a . Le second représente l'action d'une couche de courant dont la densité superficielle est représentée par le vecteur k (loi de Laplace). Ces transformations s'appliquent à l'intégrale de volume, en remplaçant ν par ∇ . On voit, en résumé, qu'un champ quelconque peut être envisagé comme produit par la superposition de deux champs fournis, l'un par une distribution de masses newtoniennes, l'autre par une distribution de masses laplaciennes. C'est le résultat signalé par M. Vaschy et démontré d'une façon élégante par M. Larose, au moyen des quaternions.

TROISIÈME APPLICATION DE LA FORMULE (1). — Si l'on cesse de poursuivre l'analogie de la formule (1) avec celle de Cauchy, on peut donner au crochet une signification quelconque. Par exemple, si f

est un vecteur, $[\nu\alpha f]$ peut désigner le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs ν , α et f . Dans cette hypothèse, l'intégrale suivant σ est nulle. La formule (1) se réduit à

$$(3) \quad \int_s \frac{[\alpha\nu f]}{r^2} ds + \int_v \frac{[\alpha\nabla f]}{r^2} dv = 0,$$

les dérivations de ∇ portant seulement sur f . En particulier, si le vecteur f dérive d'un potentiel, $[\alpha\nabla f]$ est nul et la formule (3) se réduit à

$$\int_s \frac{[\alpha\nu f]}{r^2} ds = 0.$$

Cette formule peut être énoncée sous forme de théorème :

Si l'on considère une distribution de vecteur f qui dérive d'un potentiel, puis une couche superficielle s dont la densité est représentée par le vecteur f , enfin l'action de cette couche superficielle, agissant d'après la loi de Laplace sur un point intérieur, le flux de force qui traverse la surface s est nul.

Il ne semble pas utile de multiplier les exemples pour montrer la fécondité de la formule (1). Elle constitue elle-même une application particulière importante, il est vrai, des formules générales que j'ai données pour la réduction des intégrales multiples. Ces formules, d'une application si simple, jouent un rôle fondamental en Physique mathématique, et il y aurait, je pense, intérêt à en répandre l'usage.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 1^{er} JUILLET 1896.

PRÉSIDENCE DE M. KOENIGS.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Euverte, présenté par MM. Laisant et Kœnigs; M. Courtin, présenté par MM. Laisant et Touche; M. Larose, présenté par MM. Carvallo et Laisant; M. Hadamard, présenté par MM. Kœnigs et Tannery; M. Laugel, présenté par MM. Hermite et Picard; M. Baker, pré-

senté par MM. Fields et Raffly; M. Boulanger, présenté par MM. Humbert et Painlevé.

Communications :

M. Kœnigs : *Sur les courbes à torsion constante.*

M. RAFFY fait la Communication suivante :

Sur le signe de la torsion des courbes gauches.

Une courbe gauche étant tracée dans l'espace, pour nous rendre compte de son allure en l'un de ses points M, imaginons qu'un observateur soit debout sur l'une des faces du plan xMy osculateur en M, et qu'il regarde le point M. Comme la courbe traverse ce plan en M, l'un des deux arcs de courbe séparés par le point M lui paraîtra *au-dessous* du plan xMy , l'autre *au-dessus*. Si l'arc *inférieur* est à sa gauche, il jugera qu'un point qui décrit la courbe en s'élevant *monte de gauche à droite*; on dit alors que l'allure de la courbe en M est *dextrorsum* (*sinistrorsum* dans le cas contraire).

Ce qui justifie cette distinction importante, c'est que la courbe, comme on le voit aisément, présente la même apparence à l'observateur, quelle que soit celle des deux faces du plan osculateur sur laquelle celui-ci se tient debout, pourvu qu'il se place toujours du même côté du plan rectifiant xMz , soit du côté du centre de courbure K relatif au point M (côté des y positifs), soit du côté opposé.

Convenons maintenant de placer l'observateur *du côté du plan rectifiant où n'est pas le centre de courbure*. Donnons au trièdre (M, xyz) la disposition habituellement adoptée en Géométrie analytique et choisissons le signe de la torsion (indépendant, comme on sait, du sens des arcs croissants) de telle sorte qu'on ait pour les points de la courbe voisins de l'origine M

$$x = s + \dots, \quad z = -\frac{6s^3}{RT} + \dots$$

Nous arriverons à cette règle : *une courbe à torsion positive est dextrorsum, une courbe à torsion négative est sinistrorsum.*

Les conclusions seraient inverses si l'on changeait la disposition des axes ou la situation de l'observateur.

J'ajouterai encore ce théorème : *Si deux courbes ont, aux extrémités d'arcs égaux, leurs courbures égales, leurs torsions égales et de signes contraires, l'une d'elles peut être rendue symétrique de l'autre par rapport à un plan.*

M. HADAMARD adresse la Note suivante :

Sur les fonctions entières.

Dans un précédent Mémoire ⁽¹⁾, j'ai étudié les relations qui existent entre l'ordre de grandeur des coefficients du développement d'une fonction entière et l'ordre de grandeur de la fonction pour des valeurs infinies de la variable. J'ai reconnu depuis que ces relations pouvaient se mettre sous une forme plus simple et en même temps plus exacte. Je vais exposer sommairement les résultats auxquels j'ai été conduit à cet égard.

Soit la fonction entière

$$(1) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \dots$$

Comme dans le Mémoire cité, je porterai les valeurs de m en abscisses et les valeurs de $\mu = L \left| \frac{1}{a_m} \right|$ en ordonnées. Les coefficients de la série seront ainsi représentés par une série de points auxquels je circonscrirai le polygone de Newton P, ainsi qu'il a été expliqué *loco citato*.

D'autre part, je désignerai par τ_1 le logarithme du module maximum de la fonction sur le cercle de rayon e^ξ (où ξ est un nombre réel quelconque). Le lieu du point (ξ, τ_1) est une courbe C qui tourne toujours sa concavité vers les τ_1 positifs; elle aura en général (mais non en tous ses points) une tangente, ce dont d'ailleurs nous n'aurons pas à nous servir.

Soit (ξ, τ_1) un point de cette courbe C. Les expressions des coefficients a_m sous forme d'intégrales définies nous montrent que l'on a

$$|a_m| < e^{\tau_1 - m\xi},$$

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*; 1893.

ou bien

$$(2) \quad \mu + \eta - m\xi > 0.$$

Le premier membre égalé à 0 représente, en supposant le plan du point (m, μ) et le plan du point (ξ, η) superposés, la polaire du point ξ, η par rapport à la parabole $m^2 - 2\mu = 0$. Cette polaire doit donc laisser le point (m, μ) en dessus.

Nous arrivons, par conséquent, à la première conclusion suivante :

Prenons le contour C_1 , réciproque du contour P par rapport à la parabole

$$(3) \quad m^2 - 2\mu = 0;$$

la courbe C est tout entière au-dessus du contour C_1 .

Soit, d'autre part, $\mu = m\alpha - \beta$ un côté du polygone P. Le point (α, β) est un sommet de C_1 . Les coefficients a_m seront tous inférieurs en valeur absolue aux valeurs correspondantes de $e^{\beta - m\alpha}$. Remplaçant dans l'équation (1), on obtient, pour $\xi < \alpha$, l'inégalité

$$(4) \quad e\eta < \frac{e\beta}{1 - e^{\xi - \alpha}}.$$

Considérons la courbe $e\xi + e^{-\eta} = 1$. C'est une courbe tout entière comprise dans l'angle des ξ négatifs et des η positifs, et qui admet ces axes pour asymptotes. Transportons l'origine de ces axes successivement aux différents sommets du polygone C_1 (sans changer leur direction). Nous aurons ainsi une série de courbes que nous rejoindrons par des tangentes communes, de manière à former un contour mixtiligne C_2 dont les côtés courbes se raccordent aux côtés droits qui les comprennent. *La courbe C est tout entière en dessous de ce second contour C_2 .*

Nous avons donc ainsi constamment deux contours, dont l'un limite la fonction inférieurement, l'autre supérieurement. D'ailleurs, ces deux contours vont en se resserrant indéfiniment et, par conséquent, le contour C_1 , par exemple, représente asymptotiquement la courbe C (en définissant convenablement, bien entendu, ce qu'on doit entendre par cette locution).

SÉANCE DU 15 JUILLET 1896.

PRÉSIDENCE DE M. BIOCHÉ.

Communications :

M. Demoulin : *Sur les surfaces réglées minima.*

M. MANNHEIM adresse la Note suivante :

Sur le rapport des deux courbures d'une courbe gauche.

Dans la séance du 20 mai 1896, M. Mangeot s'est occupé d'une manière de représenter le rapport des deux courbures d'une courbe gauche et il a prouvé que *lorsqu'un point se déplace sur une génératrice G d'un cône quelconque, le rayon de courbure principal du cône en ce point varie proportionnellement à sa distance au sommet du cône, et le coefficient de proportionnalité est égal au rapport de la première à la seconde courbure d'une courbe quelconque ayant ses tangentes parallèles aux génératrices du cône, ces courbures étant relatives au point où la tangente est parallèle à G.*

D'après cela, le rapport des deux courbures de la courbe gauche est égal à la tangente de l'angle compris entre G et la droite Δ qui joint le sommet du cône au centre de courbure principal de cette surface relatif à un point de G.

Mais on sait (voir *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 238) que ce rapport est aussi égal à la tangente de l'angle compris entre la tangente de la courbe gauche, parallèle à G, et la droite rectifiante de cette courbe pour le point de contact de cette tangente.

Rapprochant ces deux résultats, on doit conclure que Δ est parallèle à cette droite rectifiante.

En effet, la droite Δ est l'intersection du plan mené par G normalement au cône et du plan analogue mené par la génératrice infiniment voisine de G; comme ces deux plans sont respectivement parallèles à deux plans rectifiants de la courbe gauche, Δ est bien une droite parallèle à la droite rectifiante en question.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 NOVEMBRE 1896.

PRÉSIDENCE DE M. KOENIGS.

Communications :

M. Duporeq : *Sur les centres de gravité.*

M. Kœnigs : *Sur les mouvements identiques à leurs inverses.*

M. APPELL adresse la Note suivante :

Les équations établies par Cauchy dans la deuxième partie, section première, de son Mémoire sur la *Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie*, peuvent être interprétées comme il suit :

Si l'on appelle a, b, c et u_0, v_0, w_0 les coordonnées et les projections de la vitesse initiale d'une molécule, x, y, z et u, v, w les quantités analogues au temps t , l'expression

$$u dx + v dy + w dz - (u_0 da + v_0 db + w_0 dc)$$

est une différentielle exacte.

On retrouve ainsi facilement, en partant des équations de Cauchy, le théorème de Helmholtz sur les tourbillons.

M. LEMOINE expose, d'après des renseignements personnels récents, l'état de la question des *Congrès internationaux de Mathématiciens*.

Il rappelle que l'échange préalable des vues de mathématiciens de diverses nations semblant désigner une ville de Suisse comme un lieu très favorable pour tenir la première assemblée internationale qui organiserait les Congrès périodiques, et, en particulier, Zurich parmi elles, les mathématiciens de cette ville ont décidé de s'occuper de la convocation des mathématiciens en 1897.

La Société Mathématique de France, sur la proposition de son Conseil, avait adhéré au projet, par vote unanime, dans sa séance du 17 juillet 1895.

La Société allemande des mathématiciens (*Deutsche Mathematiker-Vereinigung*), qui avait appuyé le projet de tels Congrès lors de sa réunion de Vienne, en 1894, avant que le lieu de réunion ne fût en question, a reçu, à la réunion de Francfort-sur-le-Mein, à la fin du mois de septembre dernier, une invitation du Comité provisoire de Zurich, invitation que lui apportait le Professeur Rudio, membre de ce Comité.

Il est déjà décidé que la réunion aura lieu vers le 10 août 1897, à Zurich, et qu'elle durera trois ou quatre jours; la date reste à déterminer d'une façon précise. Un Comité zurichois est nommé; il se compose de MM. Geiser, Hurwitz, Rudio, F. Weber et Frelan; il doit s'adjoindre des mathématiciens étrangers afin de prendre le caractère international. Alors, après entente avec les diverses Sociétés de Mathématiques de l'ancien et du nouveau monde, il enverra des invitations personnelles aux mathématiciens; elles seront faites dans l'esprit le plus large. Le Comité s'occupera également de l'organisation générale et du programme du Congrès.

Parmi les renseignements généraux dont M. Lemoine a connaissance, il signale que la Société Mathématique d'Édimbourg a adhéré au projet qui lui a été soumis par J. Mackay; que l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, au Congrès de Caen, en 1895, a émis un vote favorable; que les savants russes ont été des premiers à s'intéresser au projet et s'en sont occupés, particulièrement à la réunion de Kazan, le 6 septembre 1896, à propos du centenaire de Lobatchefsky, où M. Wassilief a pris la parole sur la question; que la Société Mathématique Américaine s'y est associée dès le mois d'août 1894. Il termine en disant que les fondateurs de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* ont trouvé dans des lettres de savants allemands et russes, écrites à propos de son apparition prochaine, les prémices de l'idée qu'ils ont propagée personnellement d'abord et qui est aujourd'hui en cours de réalisation. Le Journal en a, depuis, entretenu plusieurs fois ses lecteurs; il continuera à leur faire connaître les notes et les décisions y relatives qu'on voudra bien lui communiquer.

SÉANCE DU 18 NOVEMBRE 1896.

PRÉSIDENCE DE M. KOENIGS.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : M. Andoyer, présenté par MM. Kœnigs et Raffy; M. Girardville, présenté par MM. Laisant et Lemoine.

Démissions :

MM. Charles Henry, Laquière et de Presle adressent leurs démissions de membres de la Société.

Communications :

M. Fouret : *Méthode pour exprimer qu'une droite est située sur une quadrique.*

M. Humbert : *Observations sur le même sujet.*

M. LAISANT communique la Note suivante :

Identités relatives à des polynômes entiers.

Il y a déjà plusieurs mois, M. Maillard, professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers, m'a communiqué les propositions suivantes :

Si $f(x)=0$ est une équation du troisième degré ayant pour racines a, b, c , on a identiquement

$$(1) \quad f'(a) + f'(b) + f'(c) + 3f'\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 0;$$

Si $F(x)=0$ est une équation du quatrième degré ayant pour racines a, b, c, d , on a identiquement

$$(2) \quad F'(a) + F'(b) + F'(c) + F'(d) + 8F'\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right) = 0.$$

En cherchant à généraliser ces résultats, qui paraissent à un premier examen ne pas s'étendre au delà du quatrième degré, j'ai trouvé les deux identités suivantes, que je me borne ici à énoncer sans démonstration, et dans lesquelles h représente la moyenne arithmétique des racines $a, b, c, \dots, l$ d'une équation $f(x)=0$

de degré m :

$$(3) \quad \sum f^{(m-3)}(a) + \frac{m^2(m-3)}{2} f^{(m-3)}(h) = 0,$$

$$(4) \quad \sum f^{(m-2)}(a) + m(m-2) f^{(m-2)}(h) = 0;$$

les sommations s'étendent, naturellement, à toutes les racines de l'équation.

La relation (1) est un cas particulier de l'identité (4), en supposant $m = 3$, et la relation (2) est un cas particulier de l'identité (3) en supposant $m = 4$. On remarquera en outre que, si dans l'identité (4) on fait $m = 4$, on a la relation suivante, relative à un polynôme $f(x)$ du quatrième degré :

$$f''(a) + f''(b) + f''(c) + f''(d) + 8f''\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right) = 0.$$

M. DEBORCQ fait la Communication suivante :

Sur les centres de gravité des courbes parallèles.

Dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (1895, p. 461) j'ai démontré le théorème suivant :

A tout déplacement d'un plan mobile sur un plan fixe correspond un point dont la trajectoire est fermée. Le centre de gravité de cette trajectoire coïncide avec celui de la courbe formée dans le plan fixe par les centres instantanés de rotation, à la condition de supposer que les arcs de ces courbes ont des masses proportionnelles aux angles dont tourne le plan mobile pendant la description de ces arcs.

Dans le cas particulier où le plan mobile est entraîné par le roulement d'une circonférence sur une courbe fermée, le centre de cette circonférence décrit une trajectoire fermée, dont un arc quelconque est visiblement proportionnel à l'angle dont tourne le plan mobile pendant la description de cet arc : le théorème général qui précède va donc nous donner des propriétés des centres de gravité des périmètres de courbes fermées parallèles. Je rappellerai d'ailleurs que le périmètre d'une courbe γ aura sa signification analytique, c'est-à-dire que deux arcs séparés par un

point de rebroussement doivent se retrancher au lieu de s'ajouter.

Parmi les courbes fermées parallèles entre elles, il y en aura toujours une, Γ , dont le périmètre ainsi défini sera nul; et si R est la distance à cette dernière d'une, C , des courbes parallèles, celle-ci aura pour longueur $\pm 2n\pi R$, selon qu'elle se trouvera d'un côté ou de l'autre de Γ , en désignant par $2n\pi$ la courbure de Γ . D'ailleurs l'aire de C et celle de Γ différeront de l'aire $n\pi R^2$.

Cela posé, soit $d\varphi$ la courbure d'un arc ds d'une courbe fermée C ; soit C_1 une courbe parallèle à C , décrite par le centre d'une circonférence de rayon φ , roulant sur C : du théorème général on déduit que le périmètre de C_1 a pour centre de gravité celui de la courbe C , si l'on suppose la masse de l'arc ds proportionnelle à la somme $(ds + \varphi d\varphi)$. Ce résultat peut s'interpréter ainsi: soit ω le *centre de gravité des courbures* de C (la masse de ds étant supposée proportionnelle à $d\varphi$), et soient O et O_1 les centres de gravité des périmètres des courbes C et C_1 , supposées homogènes: le point O_1 sera le centre de gravité des points O et ω , si l'on attribue au point O une masse proportionnelle au périmètre de la courbe C , et au point ω une masse proportionnelle à la somme $\int_C \varphi d\varphi$, qui représente évidemment la différence des périmètres des courbes C_1 et C . Par suite les points ω , O et O_1 sont en ligne droite, et les distances ωO et ωO_1 sont inversement proportionnelles aux périmètres des courbes C et C_1 .

Ces résultats se résument ainsi:

Des courbes fermées, géométriques ou non, parallèles entre elles, ont le même centre de gravité des courbures. Les centres de gravité de leurs périmètres sont sur une droite passant par ce point fixe, et leurs distances à ce point sont inversement proportionnelles aux périmètres correspondants.

Autrement dit:

Le centre de gravité des courbures, commun à une famille de courbes fermées parallèles, a, en direction et en grandeur, le même moment relativement aux périmètres de ces courbes.

Il est bien évident que cette droite, lieu des centres de gravité des périmètres, est aussi le lieu des centres de gravité des aires comprises entre deux quelconques des courbes fermées parallèles. On voit aisément que le centre de gravité de l'aire comprise entre deux courbes parallèles C et C' coïncide avec celui du périmètre de la courbe parallèle à C et C' , qui est équidistante de ces courbes. On en déduit sans peine la propriété suivante :

Soient ω le centre de gravité des courbures, commun à une famille de courbes fermées parallèles C , $x\omega x'$ la droite qui constitue le lieu des centres de gravité des périmètres de ces courbes; soit enfin γ le centre de gravité de l'aire de celle, V , des courbes C , dont le périmètre est nul. Le lieu des centres de gravité des aires des courbes C est une conique admettant pour centre le milieu de $\gamma\omega$ et touchant en ω la droite $x\omega x'$.

Pour terminer, j'indiquerai, sans en développer les démonstrations, quelques résultats applicables à des courbes parallèles *non fermées*. Ils se déduisent des précédents, en formant des courbes fermées au moyen des courbes données, dont on prend les symétriques par rapport à leur normale commune en l'une de leurs extrémités, puis qu'on ferme par des arcs de cercle concentriques. On trouve ainsi que :

Les centres de gravité des courbures ω d'une famille d'arcs ab parallèles entre eux sont sur une droite, parallèle à la bissectrice de l'angle des normales communes extrêmes. Si φ désigne cet angle, deux courbes distantes de φ ont des centres de gravité dont la distance est

$$2 \frac{\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Quant aux centres de gravité g des périmètres de ces arcs, ils sont sur une hyperbole dont une des asymptotes est parallèle à la bissectrice de l'angle des normales extrêmes.

Les droites $g\omega$ enveloppent une parabole, qui touche également les perpendiculaires abaissées des centres de gravité g sur les cordes ab correspondantes.

SÉANCE DU 2 DÉCEMBRE 1896.

PRÉSIDENCE DE M. HOUX.

Communications :

M. Antomari : *Conditions pour qu'une équation algébrique ait un nombre donné de racines distinctes.*

M. Carvallo : *Sur l'intégrale de Clausius pour les cycles non réversibles.*

M. D'OCAGNE adresse la Note suivante :

Sur le signe de la torsion des courbes gauches et du paramètre de distribution des surfaces réglées.

Dans ses *Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse* ⁽¹⁾, récemment parues, M. Raffy a adopté, quant au signe de la torsion des courbes gauches (qui entraîne celui du paramètre de distribution des surfaces réglées), une convention qu'il a d'ailleurs fait connaître aux lecteurs de ce *Bulletin* ⁽²⁾.

J'ai eu, en raison de mon enseignement à l'École des Ponts et Chaussées, à m'occuper aussi de la question, et la convention que j'ai admise [et qui est reproduite dans mon *Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale* ⁽³⁾], paru il y a quelques mois] se trouve être inverse de celle de notre Collègue.

Aussi demanderai-je la permission d'indiquer ici la raison de mon choix. Il suffit, pour passer de la convention de M. Raffy à la mienne, de changer, dans la définition très précise qu'il a donnée à la page 185 de ce *Bulletin* (avant-dernier alinéa), les mots : « Donnons au trièdre (M,xyz) la disposition habituellement adoptée... », par ceux-ci : « Donnons au trièdre $(M,x)z$ une disposition telle que, considérés de l'intérieur du trièdre, chacun des trois angles xMy , yMz et zMx soit compté dans le sens di-

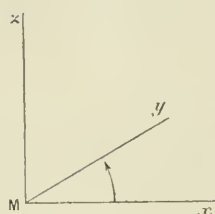
⁽¹⁾ Pages 113 et 201.

⁽²⁾ Page 185.

⁽³⁾ Pages 301, 311 et 361.

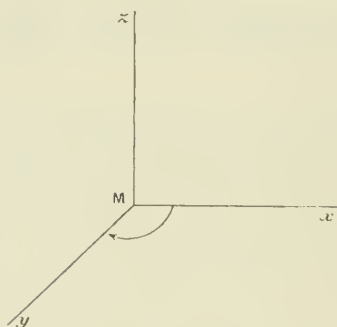
rect, c'est-à-dire dans le sens trigonométrique *positif* (*fig. 1*). »

Fig. 1.



Avec la disposition habituellement adoptée (*fig. 1 bis*), chacun

Fig. 1 bis.



de ces trois angles est compté dans le sens rétrograde ou trigonométrique *négatif*, ce qui me semble peu rationnel.

On ne voit, en effet, aucune raison pour que le sens positif des angles sur le plan des xy soit changé suivant que ce plan est considéré seul ou comme rattaché à l'axe des z .

Je reconnais que la convention à laquelle je me suis arrêté va contre les usages reçus ; mais elle me semble davantage dans la logique des choses et plus conforme au besoin d'uniformité qui se fait sentir dans le domaine mathématique.

M. LAISANT, à propos de la Communication de M. d'Ocagne, présente quelques observations sur un moyen de définir l'allure des courbes gauches (*dextrorsum* ou *sinistrorsum*).

SÉANCE DU 16 DÉCEMBRE 1896.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. LAISANT : *Sur l'organisation des Congrès internationaux de mathématiciens.*

M. ANDOYER : *Détermination des racines communes à plusieurs équations.*

M. DUPORT fait la Communication suivante :

Sur la constitution des atomes et l'action de la matière sur la matière.

Comme suite au Mémoire que j'ai publié récemment dans le *Bulletin* (t. XXIV) sous le même titre, et où j'ai montré que les atomes doivent être considérés comme de petits corps solides, j'ai obtenu les résultats suivants :

1° Les moments principaux d'inertie relatifs au centre de gravité d'un atome sont égaux ;

2° L'action d'un point M d'un atome sur un point A du même atome ne saurait dépendre seulement de la position relative de ces deux points et de leurs vitesses ;

3° Cette action peut être représentée par le segment

$$\omega^2(AP) \mu \frac{dv}{V},$$

P étant le pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur la vitesse de rotation de l'atome, cette vitesse étant considérée comme ayant pour origine le point M, μ étant la masse du point A, dv le volume du point M, V le volume de l'atome.

M. LAISANT fait la Communication suivante :

Propriétés algébriques des coefficients du binôme.

Il y a plusieurs années déjà, j'ai communiqué à la *Société mathématique* une propriété des coefficients du binôme, sans accompagner cette communication d'aucune Note. Je n'avais alors pas de démonstration algébrique satisfaisante; un peu plus tard, au Congrès de Besançon (1893), je donnai la même proposition à

L'ensemble de ces identités linéaires en $c_0, c_1, \dots, c_n$ montre que l'on a

$$\frac{c_0}{\Delta_0} = \frac{c_1}{\Delta_1} = \dots = \frac{c_n}{\Delta_n}.$$

Il est visible qu'on ne peut avoir des identités de la forme indiquée que jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$ opération. Si l'on continuait au delà, on obtiendrait, en effet, en prenant les dérivées, des termes qui ne contiendraient plus $(1+x)$ en facteur.

M. ANDOYER indique une autre démonstration de la propriété ci-dessus.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LA DISTRIBUTION DES ZÉROS DE LA FONCTION $\zeta(s)$ ET SES CONSÉQUENCES ARITHMÉTIQUES ⁽¹⁾;

Par M. HADAMARD.

I. — *Sur les zéros de la fonction ζ et de quelques fonctions analogues.*

I. La fonction $\zeta(s)$ de Riemann est définie, lorsque la partie réelle de s est plus grande que 1, par l'équation

$$(1) \quad \log \zeta(s) = - \sum_p \log \left(1 - \frac{1}{p^s} \right),$$

où p désigne successivement les différents nombres premiers; les logarithmes sont népériens. Elle est holomorphe dans tout le plan, sauf au point $s=1$, qui est un pôle simple. Elle ne s'annule pour aucune valeur de s dont la partie réelle soit supérieure à 1, puisque le second membre de l'équation (1) est fini. Mais elle admet une infinité de zéros imaginaires dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1. Stieltjes avait démontré, conformément aux prévisions de Riemann, que ces zéros sont tous de la forme

⁽¹⁾ Les résultats fondamentaux du présent Mémoire ont été communiqués à l'Académie des Sciences, dans la séance du 22 juin 1896.

$\frac{1}{2} + ti$ (le nombre t étant réel); mais sa démonstration n'a jamais été publiée, et il n'a même pas été établi que la fonction ζ n'ait pas de zéros sur la droite (1) $\Re(s) = 1$.

C'est cette dernière conclusion que je me propose de démontrer.

2. Faisons d'abord tendre s vers 1 par valeurs réelles et décroissantes. Le logarithme de $\zeta(s)$, ou, à une quantité finie près, la série

$$(2) \quad S = \sum_p \frac{1}{p^s}$$

augmente indéfiniment comme $-\log(s-1)$.

Remplaçons maintenant s par $s + ti$ et imaginons que le point d'affixe $1 + ti$ soit un zéro de ζ . Alors la partie réelle de $\log(s + ti)$, c'est-à-dire (à une quantité finie près) la somme

$$(3) \quad P = \sum_p \frac{1}{p^s} \cos(t \log p),$$

devra croître indéfiniment par valeurs négatives comme $\log(s-1)$, c'est-à-dire comme $-S$, lorsque s tendra vers 1 (t restant fixe).

3. Cela posé, soit α un angle que nous supposons petit; parmi les différents nombres premiers, distinguons deux catégories :

1^{re} Ceux qui satisfont, pour quelque valeur entière de k , à la double inégalité

$$(4) \quad \frac{(2k+1)\pi - \alpha}{t} < \log p < \frac{(2k+1)\pi + \alpha}{t}.$$

Les parties des sommes S_n et P_n [c'est-à-dire des séries (2) et (3) bornées à leurs n premiers termes] correspondant à cette première catégorie de nombres premiers seront désignées par S'_n et P'_n .

2^{re} Les nombres premiers restants, c'est-à-dire ceux qui ne

(1) $\Re(s)$ désigne, comme d'habitude, la partie réelle de s .

vérifient la double inégalité (4) pour aucune valeur de k , donneront, dans les sommes S_n et P_n , les parties S_n'' et P_n'' .

Considérons le rapport $\varphi_n = \frac{S_n'}{S_n}$, lequel est compris entre σ et 1 : lorsque n augmentera indéfiniment, ce rapport aura soit une limite, soit des limites d'oscillation. Si $\zeta(1+ti)$ était nul, cette ou ces limites devraient tendre vers 1 avec s . Autrement dit, φ étant un nombre quelconque plus petit que 1 , on pourrait faire correspondre à toute valeur réelle de s supérieure à 1 , mais suffisamment voisine de 1 , une valeur de n à partir de laquelle on aurait

$$(5) \quad \varphi_n > \varphi.$$

On peut, en effet, écrire évidemment :

$$\begin{aligned} P_n' - S_n' &\geq -\varphi_n S_n, \\ P_n'' &\geq -S_n'' \cos x \geq -(1-\varphi_n) S_n \cos x \end{aligned}$$

(les inégalités ayant leur sens algébrique). Si donc on avait

$$\varphi_n \leq \varphi,$$

il en résulterait

$$P_n = -\theta S_n$$

où $\theta = \varphi + (1-\varphi)\cos x$ est un nombre fixe plus petit que 1 ; et si cela avait lieu pour une infinité de valeurs de n , on pourrait passer à la limite et écrire

$$P = -\theta S,$$

ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse $\zeta(1+ti) = 0$, ainsi qu'il a été remarqué au numéro précédent.

L'égalité $\zeta(1+ti) = 0$ exige donc bien que la ou les limites de φ_n tendent vers 1 avec s .

4. Changeons alors t en $2t$, dans la série (3) et soit Q la nouvelle série ainsi obtenue : les termes qui formaient, dans la série (3), les sommes $P_n, P_n'', P_n = P_n' + P_n''$ donneront, dans cette nouvelle série, respectivement les sommes $Q_n', Q_n'', Q_n = Q_n' + Q_n''$ et l'on aura, cette fois,

$$\begin{aligned} Q_n' &= S_n' \cos 2x - \varphi_n S_n \cos 2x, \\ Q_n'' &= S_n'' = -(1-\varphi_n) S_n. \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$Q_n \geq S_n [\rho_n \cos 2x - (1 - \rho_n)];$$

d'où, moyennant l'inégalité (5) supposée vérifiée pour n suffisamment grand,

$$Q_n \geq \theta' S_n,$$

θ' désignant le nombre $\rho \cos 2x - (1 - \rho)$, lequel est positif si nous avons pris $1 > \rho > \frac{1}{1 + \cos 2x}$.

Or ceci donnerait $Q \geq \theta' S$ et, par suite, Q augmenterait indéfiniment par valeurs positives; de sorte que le point d'affixe $1 + 2it$ serait un infini de $\zeta(s)$: ce que nous savons n'avoir pas lieu.

L'impossibilité de l'hypothèse $\zeta(1 + it) = 0$ est donc mise en évidence.

5. Il est remarquable que cette démonstration ne repose que sur les propriétés les plus simples de $\zeta(s)$: nous nous sommes, en effet, exclusivement servi des remarques suivantes: 1° le logarithme de notre fonction est développable en série de la forme $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$, les nombres a_n étant tous positifs; 2° la fonction est uniforme sur la droite qui limite la convergence de cette série et ne présente sur cette droite qu'un seul pôle simple.

Toute fonction satisfaisant à ces conditions sera donc différente de 0 sur la droite limite.

Ainsi, dans la démonstration précédente, c'était uniquement pour simplifier l'écriture que nous avons réduit le second membre de l'équation (1) à la série S : la démonstration se serait également appliquée au développement complet de $\log \zeta(s)$. De même, les nombres premiers ayant été distribués d'une façon quelconque en deux catégories, les nombres de la première catégorie étant désignés par p' , ceux de la deuxième par p'' , si la fonction représentée (lorsque la partie réelle de s est supérieure à 1) par le produit infini

$$(6) \quad f(s) = \prod_{p'} \left(1 - \frac{1}{p'^s}\right)^{-1} \prod_{p''} \left(1 + \frac{1}{p''^s}\right)$$

est holomorphe sur la droite limite $\Re(s) = 1$, elle est différente de 0 sur cette droite ⁽¹⁾.

En effet, le logarithme du produit

$$f(s) \zeta(s) = \frac{1}{\prod_{p'} \left(1 - \frac{1}{p'^s}\right)^2 \prod_{p''} \left(1 - \frac{1}{p''^{2s}}\right)}$$

est représenté par une série $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ à coefficients positifs : ce produit satisfait donc aux conditions ci-dessus indiquées.

Ce cas est, par exemple, celui de la fonction de Schlömilch

$$(7) \quad \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} = \prod_p \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{p^s}}.$$

6. Plus généralement, nous allons étendre la proposition qui précède aux séries introduites en Arithmétique par Dirichlet, et dont nous devons tout d'abord rappeler, en les complétant sur certains points, les principales propriétés.

Ces séries appartiennent à la catégorie des séries de la forme $\sum \frac{a_n}{n^s}$ *périodiques*, c'est-à-dire dont les coefficients a_n se reproduisent de k en k . De telles séries sont évidemment des combinaisons linéaires des k fonctions

$$\begin{aligned} \zeta_1(s) &= \frac{1}{1^s} + \frac{1}{(k+1)^s} + \frac{1}{(2k+1)^s} + \dots, \\ \zeta_2(s) &= \frac{1}{2^s} + \frac{1}{(k+2)^s} + \frac{1}{(2k+2)^s} + \dots, \\ &\dots\dots\dots \\ \zeta_k(s) &= \frac{1}{k^s} + \frac{1}{(k+k)^s} + \frac{1}{(2k+k)^s} + \dots, \end{aligned}$$

étudiées par MM. Hurwitz ⁽²⁾ et Cahen ⁽³⁾. Ces fonctions sont

(1) Sauf peut-être au point $s = 1$; mais cette circonstance ne se présentera pas dans la suite.

(2) *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XXVII, p. 86-102; 1882.

(3) *Thèse de Doctorat*, 1894, et *Annales de l'École Normale supérieure*, 3^e série, t. XI.

uniformes dans tout le plan, avec le seul pôle simple $s=1$ et le résidu correspondant $\frac{1}{k}$, ainsi qu'il résulte de l'expression

$$(8) \quad \zeta_r(s) = \frac{i}{2\pi} \Gamma(1-s) \int_1^{\infty} (-x)^{s-1} \frac{e^{(k-r)x}}{e^{kx}-1} dx,$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour C partant de $+\infty$ et y revenant après avoir tourné dans le sens trigonométrique autour de l'origine, et $-x$ étant considéré comme ayant (pour x réel et positif) l'argument $-i\pi$ dans la première partie du chemin d'intégration et, par suite, l'argument $+i\pi$ dans la seconde.

L'intégrale qui figure dans la formule précédente est une fonction entière de s , et les théorèmes généraux donnés dans mon Mémoire *Sur les propriétés des fonctions entières* ⁽¹⁾ permettent d'en déterminer le genre. A cet effet, on peut, par exemple, diviser le contour C en deux parties : l'une C' partant du point $x=1$ et y revenant après circulation autour de l'origine; l'autre C'' comprenant les deux traits de 1 à $+\infty$; les intégrales prises suivant ces deux traits ne diffèrent entre elles et de l'intégrale

$$(9) \quad \int_1^{\infty} x^{s-1} \frac{e^{(k-r)x}}{e^{kx}-1} dx$$

que par les facteurs exponentiels $e^{-i\pi s}$ pour la première, $e^{i\pi s}$ pour la seconde. Or, le coefficient de s^n dans l'intégrale (9), qui a pour valeur

$$\frac{1}{n!} \int_1^{\infty} (\log x)^n \frac{e^{(k-r)x}}{e^{kx}-1} \frac{dx}{x},$$

est (puisque r est un entier plus grand que 0) au plus comparable au coefficient correspondant de la fonction

$$Q(s) = \int_1^{\infty} x^{s-1} e^{-rx} dx,$$

qui intervient dans l'étude de la fonction Γ et dont l'ordre de

(1) *Journal de M. Jordan*, 4^e série, t. IX; 1893.

grandeur pour s infini est celui de Γ . Quant à l'intégrale prise le long de C' , le coefficient de s^n , qui a pour valeur

$$\frac{1}{n!} \int_{C'} (\log x)^n \frac{e^{(k-r)x}}{e^{kx}-1} dx,$$

y est au plus de l'ordre de $\frac{K^n}{1.2 \dots n}$, en désignant par K le module maximum de $\log x$ sur le contour en question. On voit donc que la fonction considérée est de genre 1 : le nombre de zéros de cette fonction, compris dans le cercle de rayon R , est de l'ordre de $R \log R$.

7. Lorsqu'on change s en $1-s$, les nouvelles valeurs des fonctions ξ s'expriment en fonction des anciennes par les relations établies par M. Hurwitz ⁽¹⁾ et que l'on peut prendre sous la forme ⁽²⁾

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-s)} \sum_{l=1}^k \sigma^l \xi_l(s) \\ = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{s-1} \left[e^{(s-1)\frac{i\pi}{2}} \xi_{k-r}(1-s) + e^{-(s-1)\frac{i\pi}{2}} \xi_r(1-s) \right] \\ (r = 1, 2, \dots, k), \end{cases}$$

où σ désigne $e^{\frac{2i\pi}{k}}$.

8. Pour définir ses séries, Dirichlet ⁽³⁾ part de la décomposition du nombre k en facteurs premiers

$$(11) \quad k = 2^\lambda p^\varpi p'^{\varpi'} \dots \quad (\lambda \geq 0; \varpi, \varpi', \dots > 0),$$

et, à tout entier n premier avec k , fait correspondre les indices

$$\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \dots$$

⁽¹⁾ HURWITZ, *loc. cit.*, p. 93.

⁽²⁾ CAHEN, *loc. cit.*, nos 47, 53.

⁽³⁾ *Abhandlungen der Berl. Acad.*, 1837; traduit par Terquem, *Journal de Liouville*, 1^{re} série, t. IV; 1839. Nous nous conformons aux notations employées dans les *Vorlesungen über Zahlentheorie*, éditées par Dedekind, édition de 1863, supplément VI.

définis par les congruences

$$(12) \quad \begin{cases} n \equiv (-1)^{\alpha} 5^{\beta} & (\text{mod } 2^{\lambda}), \\ n \equiv g^{\gamma} & (\text{mod } p^{\varpi}), \\ n \equiv g'^{\gamma'} & (\text{mod } p'^{\varpi'}), \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{cases}$$

où $g, g', \dots$ sont des racines primitives pour les modules respectifs $p^{\varpi}, p'^{\varpi'}, \dots$. Les nombres α et β sont ainsi définis aux modules a et b près : les nombres a et b ayant tous deux la valeur 1, si $\lambda = 0, 1$, et prenant les valeurs $a = 2, b = \frac{1}{2} \varphi(2^{\lambda})$, si $\lambda \geq 2$. Parcillemeut, les nombres $\gamma, \gamma', \dots$ sont définis relativement aux modules

$$c = \varphi(p^{\varpi}), \quad c' = \varphi(p'^{\varpi'}), \quad \dots,$$

où φ est la fonction bien connue qui exprime combien il y a de nombres premiers à un entier donné et inférieurs à lui.

Réciproquement, la connaissance des indices $\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \dots$ fait connaître le nombre n , au module k près. Autrement dit, aux $\varphi(k)$ valeurs de n premières avec k et incongrues entre elles suivant le module k correspondent, d'une façon univoque, les

$$a \, b \, c \, c' \, \dots = \varphi(k)$$

systèmes de valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \dots$ incongrus entre eux suivant les modules $a, b, c, c', \dots$.

Désignant par $\theta, \tau, \omega, \omega', \dots$ respectivement une racine $a^{\text{ième}}$, une racine $b^{\text{ième}}$, une racine $c^{\text{ième}}$, une racine $c'^{\text{ième}}$, $\dots$ de l'unité, autrement dit posant

$$(13) \quad \begin{cases} \theta = \pm 1, \\ \tau = e^{\frac{2i\pi a}{b}}, \\ \omega = e^{\frac{2i\pi \tau}{c}}, \\ \omega' = e^{\frac{2i\pi \tau}{c'}}, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Dirichlet introduit la fonction

$$\psi_{\gamma}(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ n'est pas premier avec } k, \\ \theta^{\alpha} \tau^{\beta} \omega^{\gamma} \omega'^{\gamma'} \dots, & \text{si } n \text{ est premier avec } k. \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \dots$ étant les indices de n [l'indice ν a pour but de distinguer les unes des autres les $\varphi(k)$ fonctions ψ correspondant aux différents choix possibles des racines $\theta, \tau, \omega, \omega', \dots$].

Il forme ensuite la série (périodique au sens indiqué ci-dessus)

$$(14) \quad L_\nu(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_\nu(n)}{n^s} = \sum_{r=1}^k \xi_r(s) \psi_\nu(r) \quad [\nu = 1, 2, \dots, \varphi(k)],$$

égale au produit infini

$$(15) \quad L_\nu(s) = \prod_q \frac{1}{1 - \frac{\psi_\nu(q)}{q^s}},$$

dans lequel q doit être remplacée successivement par tous les nombres premiers.

Les séries L_ν se répartissent en trois catégories : la première comprend une seule série L_1 , celle qui correspond à

$$\theta = \tau = \omega = \omega' = \dots = 1;$$

la seconde comprend toutes les séries L , pour lesquelles les nombres $\theta, \tau, \dots$ sont égaux à $+1$ ou à -1 (à l'exception de L_1); la troisième, les séries correspondant aux cas où l'un au moins de ces nombres est imaginaire. Ces dernières sont conjuguées deux à deux; la série

$$L_\nu(s) = \sum \xi_r(s) \psi_\nu(r),$$

déduite des racines $\theta, \tau, \omega, \omega', \dots$, est conjuguée de la série

$$L_{\nu'}(s) = \sum \frac{\xi_r(s)}{\psi_\nu(r)},$$

déduite des racines $\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\tau}, \frac{1}{\omega}, \frac{1}{\omega'}, \dots$

La série L_1 admet, comme seule singularité, le pôle simple $s=1$. Quant aux autres séries L , elles sont holomorphes dans tout le plan [parce que la somme $\frac{1}{k} \sum_r \psi_\nu(r)$ des résidus au point $s=1$ est nulle]. Dirichlet démontre qu'elles sont toutes différentes de 0 pour $s=1$.

9. De la relation générale (10), M. Hurwitz a pu déduire que certaines séries de seconde catégorie se reproduisent, à un facteur près, par le changement de s en $(1-s)$ à la façon de la fonction ζ .

Cette proposition est un cas particulier d'un théorème démontré par M. Lipschitz (1), et qui est le suivant : *La série $L_v(s)$ est (à un facteur exponentiel et trigonométrique près, analogue à celui qui se rencontre dans la formule relative à la fonction ζ) changée en sa conjuguée par le changement de s en $1-s$, sous les conditions suivantes :*

1° $\lambda \geq 3$, λ impair ;

2° $\tau \neq p-1$, si $\tau = 1$; τ non divisible par p , si $\tau > 1$;

3° $\tau' \neq p'-1$, si $\tau' = 1$; τ' non divisible par p' , si $\tau' > 1$; ...

Ce théorème nous fournit un renseignement important sur la distribution des zéros de $L_v(s)$. Puisque cette fonction n'a aucun zéro imaginaire dont la partie réelle soit plus grande que s , elle n'en a non plus aucun dont la partie réelle soit négative : les zéros imaginaires sont compris dans la même bande que ceux de $\zeta(s)$. Ils sont même, comme ceux de $\zeta(s)$, disposés symétriquement par rapport à la droite $\Re(s) = \frac{1}{2}$, puisqu'à tout zéro α correspond un zéro α' (différent ou non du premier), tel que α et $1-\alpha'$ soient imaginaires conjugués.

Toutefois, cette conclusion n'est pas encore démontrée dans les cas où la relation de Lipschitz ne s'applique pas ; mais on ramène ces cas aux autres par les remarques suivantes :

1° Si une racine ω , par exemple, est égale à 1, on aura

$$L_v(s) = [1 - \psi'_v(p)p^{-s}] L'_v(s),$$

la série L'_v étant composée en partant du nombre k supposé débarrassé du facteur p^σ . La même circonstance se produit pour le facteur 2 lorsque l'exposant λ est égal à 1 ;

2° Si l'entier τ est divisible par p^h , la série peut se composer en partant de l'entier k , divisé par p^h , la racine primitive g de p^σ étant une racine primitive de $p^{\sigma-h}$. La nouvelle valeur de τ ne con-

(1) *Journal de Crelle*, t. 105, p. 137-157.

tiendra plus p en facteur. Il en est de même pour le facteur 2 lorsque l'entier μ est pair, et aussi lorsque $\lambda = 2$, $\theta = 1$.

3^o Le raisonnement de l'auteur est encore valable pour $\lambda = 2$, $\theta = -1$, en prenant pour l'expression (1) $\left(\theta, \psi; e^{\frac{2\pi i \pi}{2^k}}\right)$ la valeur $e^{\frac{2\pi i \pi}{4}} + \theta e^{-\frac{2\pi i \pi}{4}}$.

Notre conclusion est donc établie pour toutes les séries L_ν . On pourrait dès lors développer, sur la distribution des zéros de L_ν , une théorie analogue à celle de M. von Mangoldt (2). La seule remarque sur laquelle se fonde cet auteur, outre les propriétés communes à $\zeta(s)$ et aux séries L_ν , est que l'argument de $\zeta(s)$ reste fini lorsque le point d'affixe s décrit la droite $\Re(s) = a > 1$. Or cette propriété appartient également aux fonctions L_ν . On pourrait donc compléter l'analyse présentée à cet égard (3) par Piltz.

10. L'équation fondamentale utilisée par Dirichlet pour la démonstration de son théorème, est

$$(16) \quad \sum_{\nu} \frac{\log L_{\nu}(s)}{\psi_{\nu}(m)} = \varphi(k) \left(\sum \frac{1}{q^s} + \frac{1}{2} \sum' \frac{1}{q^{2s}} + \frac{1}{3} \sum'' \frac{1}{q^{3s}} + \dots \right),$$

où m est un entier quelconque premier avec k et où les signes $\sum$, $\sum'$, $\sum''$, ..., s'étendent, le premier aux nombres premiers q tels que $q \equiv m \pmod{k}$, le second aux nombres premiers q tels que $q^2 \equiv m \pmod{k}$, etc. Pour $m = 1$, ceci donne

$$\log \prod_{\nu} L_{\nu}(s) = \varphi(k) \left(\sum \frac{1}{q^s} + \frac{1}{2} \sum' \frac{1}{q^{2s}} + \frac{1}{3} \sum'' \frac{1}{q^{3s}} + \dots \right).$$

Donc les séries de Dirichlet n'ont aucun zéro sur la droite $\Re(s) = 1$, car la fonction $\prod_{\nu} L_{\nu}(s)$ satisfait aux conditions énumérées au n^o 3.

(1) *Loc. cit.*, p. 141, formule (9). M. Lipschitz désigne par la lettre ψ la quantité que nous nommons τ .

(2) *Journal de Crelle*, t. 111.

(3) *Habilitationschrift*, Léna, 1884.

II. — Conséquences arithmétiques.

11. Nous sommes bien loin, comme on le voit, d'avoir démontré l'assertion de Riemann-Stieltjes; nous n'avons même pas pu exclure l'hypothèse d'une infinité de zéros de $\zeta(s)$ s'approchant indéfiniment de la droite limite. Cependant le résultat auquel nous sommes parvenu suffit, à lui seul, pour démontrer les principales conséquences arithmétiques que l'on a, jusqu'ici, essayé de tirer des propriétés de $\zeta(s)$.

Tout d'abord on peut remarquer que l'équation

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = -\log(s-1) + \text{quantité finie}$$

fournit déjà quelques renseignements sur la distribution des nombres premiers. Soit, en effet, a un nombre plus grand que 1, et désignons par N_λ le nombre des nombres premiers compris entre a^λ et $a^{\lambda+1}$. Le premier membre de l'équation précédente est compris entre $\sum_\lambda \frac{N_\lambda}{a^\lambda s}$ et $\sum_\lambda \frac{N_\lambda}{a^{\lambda+1} s}$. En posant $\frac{1}{a^{s-1}} = x$ et remar-

quant que $s-1 = \frac{\log \frac{1}{x}}{\log a}$ peut être ici remplacé par $1-x$, on peut écrire, à une quantité finie près, pour x plus petit que 1, mais tendant vers 1 :

$$\sum_\lambda \frac{N_\lambda}{a^\lambda} x^\lambda > \log(1-x) > \frac{x}{a} \sum_\lambda \frac{N_\lambda}{a^\lambda} x^\lambda,$$

d'où l'on déduit que, ε étant un nombre positif aussi petit qu'on veut, on aura une infinité de fois

$$N_\lambda > \frac{(1-\varepsilon)a^\lambda}{\lambda}$$

et une infinité de fois

$$N_\lambda < \frac{(1+\varepsilon)a^{\lambda+1}}{\lambda+1}.$$

conclusions analogues à celles que donne, par exemple, M. Poincaré dans son *Mémoire sur l'extension aux nombres premiers*

complexes des inégalités de *M. Tchebicheff* ⁽¹⁾, et qui suffiraient, comme elles, à établir que si le rapport d'un nombre x à la somme des logarithmes des nombres premiers plus petits que lui a une limite, cette limite ne peut être que 1.

D'autres inégalités pourraient sans doute être tirées de ce fait que, quel que soit le nombre réel t différent de 0, la quantité $\sum \frac{1}{p^s} \cos(t \log p)$ reste finie lorsque s tend vers 1.

12. Dans son Mémoire précédemment cité, *M. Cahen* présente une démonstration du théorème énoncé par *Halphen* : *La somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à x est asymptotique à x* . Toutefois son raisonnement dépend de la proposition de *Stieltjes* sur la réalité des racines de $\zeta(\frac{1}{2} + ti) = 0$. Nous allons voir qu'en modifiant légèrement l'analyse de l'auteur on peut établir le même résultat en toute rigueur.

A cet effet, au lieu de partir de l'intégrale $\frac{1}{2i\pi} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^z}{z} dz$, égale à 1 ou à 0 suivant que x est plus grand ou plus petit que 1, nous considérerons l'intégrale plus générale

$$J_\mu = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^z}{z^\mu} dz.$$

Dans cette intégrale, comme dans la première, x est une quantité positive ainsi que a ; μ est positif.

Lorsque μ est un entier, cette intégrale s'évalue par les mêmes méthodes que J , ou s'en déduit par une intégration par parties, déduite de l'identité

$$\frac{1}{z^\mu} = \frac{(-1)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \frac{d^{\mu-1}}{dz^{\mu-1}} \left(\frac{1}{z} \right).$$

La partie tout intégrée disparaît à l'infini et il vient

$$(17) \quad J_\mu = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{\Gamma(\mu)} \log^{\mu-1} x, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

(1) *Journal de M. Jordan*, 1^{re} série, t. VIII; 1892.

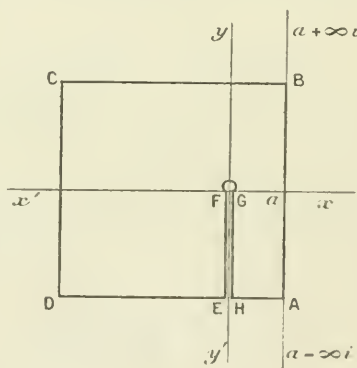
La même formule peut se démontrer pour μ non entier, auquel cas il est entendu que z^μ doit recevoir la détermination qui est réelle et positive pour $z = 0$. Pour $x < 1$, on intégrera le long d'un rectangle ayant un de ses côtés sur la droite $\Re(z) = a$ et situé dans la région $\Re(z) > a$, le second côté du rectangle augmentant indéfiniment comme la puissance $\mu'^{\text{ième}}$ ($0 < \mu' < \mu$) du premier. Le résultat est alors évident.

Pour $x > 1$, on commencera par supposer $\mu < 1$. On intégrera alors le long d'un contour ABCDEFGHA (fig. 1) composé encore d'un rectangle ayant un côté AB sur la droite $\Re(z) = a$, mais situé dans la région $\Re(z) < a$ et interrompu sur son côté DA par un lacet qui va à l'origine et en revient en suivant la partie négative de l'axe imaginaire. Si le côté BC augmente indéfiniment comme la puissance $\mu'^{\text{ième}}$ ($0 < \mu' < \mu$) de AB, l'intégrale prise le long des côtés qui s'éloignent à l'infini disparaît et il reste

$$J_\mu = \frac{1}{2i\pi} \lim \left(\int_{HG} + \int_{FE} \right).$$

Or, sur le chemin HG, l'argument de z est $-\frac{i\pi}{2}$, et, sur le

Fig. 1.



chemin FE, $\frac{3i\pi}{2}$. Il vient donc bien

$$\begin{aligned} J_\mu &= \frac{\left(e^{\frac{\mu i \pi}{2}} - e^{-\frac{3\mu i \pi}{2}} \right)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{x^{-it} dt}{t^\mu} \\ &= -\frac{e^{\frac{\mu i \pi}{2}} \sin \frac{\mu \pi}{2}}{i\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(t \log x) - i \sin(t \log x)}{t^\mu} dt = \frac{\log^{\mu-1} x}{\Gamma(\mu)}. \end{aligned}$$

Cette formule, établie pour $\mu < 1$, s'étendra au cas de $\mu > 1$ par une intégration par parties déduite de l'identité

$$\frac{1}{z^{\mu+m}} = \frac{(-1)^m \Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+m)} \frac{d^m}{dz^m} \frac{1}{z^\mu}.$$

13. Parallèlement à la voie suivie par M. Cahen, nous appliquerons la formule (17) à l'intégrale

$$(18) \quad \psi_\mu(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-xi}^{a+xi} \frac{xz}{z^\mu} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} dz,$$

où a est un nombre quelconque plus grand que 1. En vertu du développement

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_p \log p \left(\frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{2z}} + \dots \right),$$

notre formule donne

$$(19) \quad \psi_\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \left(\sum \log p \log^{\mu-1} \frac{x}{p} + \sum' \log p \log^{\mu-1} \frac{x}{p^2} + \dots \right),$$

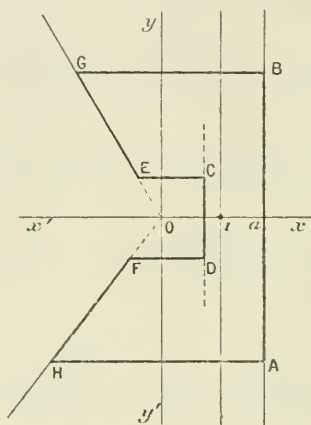
le signe $\sum$ s'étendant aux nombres premiers plus petits que x , le signe $\sum'$ aux nombres premiers plus petits que $x^{\frac{1}{2}}$, etc.

14. L'avantage que nous trouvons à prendre $\mu > 1$ réside dans la convergence de la série $\frac{1}{|z|^\mu}$, où z désigne successivement les zéros de $\zeta(z)$, convergence sur laquelle reposent, comme nous allons le voir, les raisonnements qui vont suivre.

Dans ces conditions, en effet, nous pouvons séparer de l'ensemble des racines z un nombre M de ces quantités assez grand pour que la somme $\sum \frac{1}{|z|^\mu}$, étendue aux racines restantes, soit plus petite qu'un nombre positif quelconque ε . Aucun des z n'ayant sa partie réelle égale à 1, nous pourrons (fig. 2) tracer une parallèle CD à l'axe imaginaire, laissant à sa droite la parallèle $\Re(z) = 1$ et à sa gauche les M premières racines z . Des points C, D de cette droite, nous ferons partir des parallèles CE, DF à l'axe réel, parallèles comprenant entre elles les M racines en question, ne passant par aucune autre racine, et que nous

prolongerons jusqu'à rencontre en E, F respectivement avec deux droites OEG, OFH issues de l'origine et situées respectivement dans les deux angles formés par la partie négative de l'axe réel avec les deux directions de l'axe imaginaire. Enfin nous fermerons le contour d'intégration ABGECDFA (fig. 2) par deux paral-

Fig. 2.



lèles variables BG, AH à l'axe réel (parallèles comprenant, bien entendu, CE et DF entre elles), rejoignant en A, B la droite $\Re(z) = a$.

15. Je dis, en premier lieu, que l'on peut éloigner les parallèles BG, AH à l'infini, de telle façon que la partie de l'intégrale ψ_μ relative à ces droites tende vers zéro.

On peut suivre pour cela une marche analogue à celle qui est exposée dans mon Mémoire sur les propriétés des fonctions entières ⁽¹⁾. La méthode qui va suivre diffère légèrement de celle-là; elle me paraît plus avantageuse.

Soit λ un nombre plus grand que l'unité. Traçons des parallèles à l'axe réel à des distances de cet axe représentées par $\lambda^3, \lambda^6, \dots, \lambda^{3\lambda}, \dots$. Le nombre ⁽²⁾ des racines z , dont les coordonnées sont comprises entre $\lambda^{3\lambda}$ et $\lambda^{3\lambda+3}$ est au plus égal à $K\lambda\lambda^{3\lambda}$, le nombre K

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, n° 29 et suiv.

⁽²⁾ Chaque racine est, bien entendu, comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité.

étant fini ⁽¹⁾, et il en sera de même *a fortiori* de l'intervalle $(\Lambda^{3\lambda+1}, \Lambda^{3\lambda+2})$; de sorte que si l'on range les racines α par ordre de coefficients de i croissants, il en existera au moins deux consécutives pour lesquelles les coefficients de i différeront d'une quantité supérieure à $\frac{\Lambda^{3\lambda+2} - \Lambda^{3\lambda+1}}{K\lambda\Lambda^{3\lambda}} = \frac{\Lambda(\Lambda-1)}{K\lambda}$.

Nous tracerons, à égale distance de ces deux racines, une parallèle à l'axe réel dont l'ordonnée sera désignée par z_0 , et cette ordonnée aura, avec celle de toute racine α , une différence supérieure à $\frac{\Lambda(\Lambda-1)}{2K\lambda}$.

Or on a

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} &= \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{z-\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) - \sum_{\beta} \left(\frac{1}{z-\beta} + \frac{1}{\beta} \right) - \frac{1}{z} + C \\ &= \sum_{\alpha} \frac{z}{\alpha(z-\alpha)} - \sum_{\beta} \frac{z}{\beta(z-\beta)} - \frac{1}{z} + C, \end{aligned} \right.$$

les α désignant les zéros, les β les pôles (réels et négatifs) de ζ , et C étant une constante. Lorsque z varie sur le segment BG de la parallèle d'ordonnée z_0 , le rapport $\frac{z-\beta}{\beta}$ reste supérieur à un nombre fixe, indépendant de β , et il en est de même pour le rapport $\frac{z-\alpha}{\alpha}$, si l'ordonnée de α est extérieure à l'intervalle $(\Lambda^{3\lambda}, \Lambda^{3\lambda+3})$. Les parties correspondantes du second membre de l'équation (20) donnent donc le produit de z par une somme finie (puisque les sommes $\sum \frac{1}{\alpha^2}$, $\sum \frac{1}{\beta^2}$ sont finies).

Quant aux termes correspondant aux racines α comprises entre les parallèles d'ordonnées $\Lambda^{3\lambda}$ et $\Lambda^{3\lambda+3}$, elles donneront, d'après ce qui a été dit plus haut, une somme moindre que $K\lambda\Lambda^{3\lambda} \frac{2K\lambda\Lambda^3}{\Lambda(\Lambda-1)}$, quantité de la forme $K'z_0 \log z_0$ (où K' est un nouveau nombre fini).

(1) Il est clair qu'on peut se dispenser des précautions que nous prenons ici en utilisant les résultats obtenus par M. von Mangoldt sur la distribution des quantités α ; la méthode du texte a l'avantage de s'appliquer chaque fois qu'on connaît le genre de la fonction étudiée.

On aura donc

$$\left| \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \right| < K' z_0 \log z_0;$$

d'où en reportant dans notre intégrale

$$\left| \int_{\text{BG}} \frac{xz}{z^\mu} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} dz \right| < \frac{K' \log z_0}{z_0^{\mu-1}} \int |xz| dz,$$

quantité infiniment petite pour z_0 infini.

16. L'intégrale prise le long de la droite indéfinie AB peut donc être remplacée par l'intégrale prise le long du contour indéfini HFDCEG, augmentée de la somme des résidus relatifs au pôle $z = 1$ et aux zéros α non compris entre les parallèles CE, DF.

Le résidu relatif au pôle $z = 1$ est $-x$.

Les résidus relatifs aux zéros de z non compris entre CE et DF ont une somme moindre que εx , où ε a été choisi aussi petit qu'on veut, et cela indépendamment de x .

Quant à l'intégrale prise le long du contour HFDCBG, elle est infiniment petite relativement à x . Cela est évident pour la partie finie FDCE, où il suffit de remarquer que $\frac{1}{z^\mu} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$ est fini. Sur les parties infinies EG, FH, les rapports $\left| \frac{z-\alpha}{\alpha} \right|$, $\left| \frac{z-\beta}{\beta} \right|$ sont supérieurs à un nombre fixe, et, par conséquent, la quantité $\left| \frac{1}{z} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \right|$ est finie. L'intégrale sur un de ces chemins est donc moindre que $K \int \left| \frac{xz}{z^{\mu-1}} \right| |dz|$ (le nombre K étant fini), c'est-à-dire qu'une quantité finie, décroissante quand x croît.

$\psi_\mu(x)$ est donc asymptotique à x , car, pour rendre la différence $[x - \psi_\mu(x)]$ moindre que $\tau_1 x$, il suffira de choisir $\varepsilon < \frac{\tau_1}{2}$, puis x assez grand pour que l'intégrale $\int_{\text{HFDCBG}}$ soit inférieure à $\frac{\tau_1}{2} x$.

17. Dans l'expression (19) de $\psi_\mu(x)$, nous ferons abstraction des termes compris sous les signes $\sum$ autres que le premier. Le nombre de ces signes est, en effet, moindre que $\frac{\log x}{\log 2}$, et la plus grande des sommes correspondantes est la première, inférieure

elle-même à $\log \Gamma\left(1 + x^{\frac{1}{\mu}}\right) \log^{\mu-1} x$, par conséquent (à un facteur fini près) à $x^{\frac{1}{2}} \log^{\mu} x$. Nous négligeons donc une quantité moindre que $x^{\frac{1}{2}} \log^{\mu+1} x$; et le résultat obtenu ci-dessus peut s'énoncer ainsi : *la somme $\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{\mu})} \sum \log p \log^{\mu-1} \frac{x}{p}$, étendue aux nombres premiers inférieurs à x , est asymptotique à x .*

Ce résultat (où il est entendu que nous devons supposer $\mu > 1$) diffère de l'énoncé d'Halphen : *la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à x est asymptotique à x .* Nous allons voir qu'il le comprend comme cas particulier.

18. Pour cela, prenons $\mu = 2$, ce qui donne

$$\sum_0^x \log p \log \frac{x}{p} = x(1 + \tau_1),$$

τ_1 étant (pour x assez grand) inférieur en valeur absolue à tel nombre qu'on voudra.

Dans cette relation, changeons x en $x(1 + h)$ et retranchons membre à membre : il vient

$$\sum_0^x \log p \log(1 + h) + \sum_x^{x(1+h)} \log p \log \frac{x(1+h)}{p} = x(h + \tau_1),$$

égalité dans laquelle le signe $\sum_x^{\beta} F(p)$ désigne la somme des valeurs de la fonction F pour les nombres premiers compris entre α et β .

Pour les nombres premiers qui figurent sous le second signe $\sum$, la quantité $\frac{x(1+h)}{p}$ est comprise entre 1 et $1 + h$: on peut donc écrire, en divisant par $\log(1 + h)$,

$$(21) \quad \begin{aligned} \sum_0^x \log p &< x \frac{(h + \tau_1)}{\log(1 + h)} \\ \sum_0^{x(1+h)} \log p &> x \frac{(h + \tau_1)}{\log(1 + h)}. \end{aligned}$$

Dans cette dernière, nous changerons x en $\frac{x}{1+h}$: elle deviendra

$$(22) \quad \sum_0^x \log p > x \frac{h + \tau_1}{(1+h) \log(1+h)}.$$

Les formules (21) et (22) démontrent l'énoncé d'Halphen. On voit, en effet, que $\sum_0^x \log p$ sera compris entre $x(1+\varphi)$ et $x(1-\varphi)$, si l'on a choisi h tel que

$$1 - \frac{\varphi}{2} < \frac{h}{(1+h) \log(1+h)} < \frac{h}{\log(1+h)} < 1 + \frac{\varphi}{2},$$

puis x assez grand pour que $\tau_1 < \frac{\varphi}{2} \log(1+h)$.

19. Les résultats qui précèdent s'étendent d'eux-mêmes aux séries de Dirichlet. On considérera l'intégrale

$$(23) \quad -\frac{1}{2i\pi} \int_{AB} \left[\sum_{\nu} \frac{1}{\psi_{\nu}(m)} \frac{L'_{\nu}(z)}{L_{\nu}(z)} \right] \frac{x^z}{z^{\mu}} dz,$$

où μ est un nombre plus grand que 1, les autres lettres ayant le même sens que dans les nos 8-10. Cette intégrale représente, à une quantité près infiniment petite relativement à x , le produit de $\varphi(k)$ par la somme des logarithmes des nombres premiers q congrus à m , suivant le module k et plus petits que x , multipliés respectivement par les valeurs correspondantes de $\log^{u-1} \frac{x}{q}$.

Or on peut raisonner sur cette intégrale exactement comme nous l'avons fait sur l'intégrale (18), car les propriétés de $\zeta(s)$, que nous avons utilisées et qui sont relatives à la distribution des zéros et au genre, ont été démontrées pour les séries de Dirichlet. La quantité qui figure sous le signe $\int$ dans l'intégrale (23) a pour pôle simple $z=1$, pôle de $\frac{L'_1(z)}{L_1(z)}$, et le résidu correspondant $-\frac{x}{\psi_1(m)} = -x$; les résidus relatifs aux autres pôles donnent une somme qu'on peut considérer comme négligeable vis-à-vis de x , ainsi que l'intégrale prise le long du contour GECDFH, comme il a été expliqué.

Donc l'intégrale (23) est asymptotique à x . En suivant la même marche qu'au numéro précédent nous reconnaissons que *la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à x et compris dans une progression arithmétique déterminée de raison k est asymptotique à $\frac{x}{\varphi(k)}$* .

L'équation générale

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_0^x \log q \log^{\mu-1} \frac{x}{q} = \frac{x}{\varphi(k)} (1 + \varrho)$$

qui, comme nous venons de le voir, comprend la relation correspondant à $\mu = 1$, ne paraît pas pouvoir se déduire inversement de celle-ci; il serait intéressant de rechercher quels renseignements cette équation fournit sur l'ordre de grandeur de ϱ , c'est-à-dire de l'erreur commise en remplaçant $\sum_0^x \log q$ par sa valeur asymptotique.

20. En terminant, je signalerai l'application possible de la même méthode aux séries de Weber ⁽¹⁾ et de Meyer ⁽²⁾, par lesquelles on étend le théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique aux formes quadratiques. Une fois démontré que ces séries sont uniformes, la relation ⁽³⁾, analogue à celle donnée précédemment au n° 10, prouvera qu'elles ne s'annulent pas sur la droite $\Re(s) = 1$.

Dans le cas où le déterminant est négatif, et où l'on considère la forme quadratique seule (sans faire intervenir de progression arithmétique), une formule donnée par Weber ⁽⁴⁾ fournit la démonstration demandée; en même temps, elle fait connaître le genre de ces séries et fournit la relation correspondant au changement de s en $1 - s$. Les méthodes exposées dans le présent Mémoire sont donc dès à présent applicables à ce cas particulier.

⁽¹⁾ *Math. Annalen*, t. XX, p. 301.

⁽²⁾ *Journal de Crelle*, t. 103, p. 98; cf. BACHMANN, *Analytische Zahlentheorie*, Ch. X; Leipzig, Teubner, 1894.

⁽³⁾ BACHMANN, *loc. cit.*, p. 291, ligne 6, formule (34)

⁽⁴⁾ BACHMANN, *loc. cit.*, p. 302, ligne 4.

NOTA. — Pendant la correction des épreuves, je reçois communication des recherches que M. de la Vallée-Poussin consacre au même sujet dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (1). Nos raisonnements, trouvés d'une façon indépendante, ont quelques points communs : il est remarquable, en particulier, de constater que M. de la Vallée-Poussin a été conduit, lui aussi, à employer comme intermédiaire le fait que la fonction ξ n'a pas de racine de la forme $1 + ti$, quoique les procédés de démonstration soient tout à fait différents. Je crois qu'on ne refusera pas à ma méthode l'avantage de la simplicité.

Les critiques, adressées par M. de la Vallée-Poussin aux démonstrations fondées sur l'emploi de l'intégrale $\int_{a-xi}^{a+xi} x^z \frac{dz}{z}$, n'intéressent point la nôtre, fondée sur l'intégrale

$$\int_{a-xi}^{a+xi} \frac{x^z dz}{z^\mu} \quad (\mu > 1),$$

grâce au fait que cette dernière garde un sens, même lorsqu'on remplace chaque élément par son module.

DÉMONSTRATION DE L'EXISTENCE DE L'INTÉGRALE D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRE;

Par M. IVAR BENDIXSON.

Étant donnée une équation différentielle

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

la méthode d'approximation de Cauchy met en évidence l'existence d'une intégrale qui, pour $x = x_0$, prend la valeur y_0 , si l'on ne fait sur la fonction f que les hypothèses suivantes : dans le domaine

$$(2) \quad |x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta,$$

la fonction f est continue; il existe une quantité positive k telle qu'on ait

$$|f(x, y') - f(x, y)| < k |y' - y|,$$

(1) Tome XX, 2^e Partie: 1896.

y' , y et x étant des valeurs des variables appartenant au domaine (2).

Quand il s'agit de la démonstration de l'existence d'une intégrale de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} f(x, y) = 0,$$

qui, pour $x = x_0$, soit égale à y_0 , on se borne, en général, à en établir l'existence dans le cas où f est une fonction holomorphe des deux variables. En étudiant la méthode d'approximation de Cauchy de plus près, il n'est pourtant pas difficile de remplir cette lacune et d'en tirer une démonstration de l'existence de l'intégrale, en ne faisant sur la fonction f d'autre hypothèse que celle d'être elle-même continue, et d'avoir sa dérivée première par rapport à y , $f'_y(x, y)$, continue, pour les valeurs de x et y appartenant au domaine (2).

Cette hypothèse faite, nous prouverons, en effet, que si

$$y = \psi(x, x_0, y_0)$$

représente l'intégrale de l'équation (1), qui, pour $x = x_0$, prend la valeur y_0 , cette fonction regardée comme fonction des constantes d'intégration x_0, y_0 satisfait à l'équation

$$(3) \quad \frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{dy}{dy_0} f(x_0, y_0) = 0.$$

Soit, à cette fin, M la valeur absolue maxima de $f(x, y)$ pour les points du domaine (2) et ρ une quantité positive satisfaisant aux inégalités

$$\rho \leq \delta, \quad \rho \geq \frac{\delta}{M}.$$

Considérons une valeur de x pour laquelle $|x - x_0| < \rho$, et partageons l'intervalle $x_0 x$ en intervalles $x_0 x_1, x_1 x_2, \dots, x_{n-1} x_n (x_n = x)$. Formons ensuite, conformément à la méthode de Cauchy, les équations

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= f(x_0, y_0)(x_1 - x_0), \\ y_2 - y_1 &= f(x_0, y_1)(x_2 - x_1), \\ &\dots\dots\dots \\ y_n - y_{n-1} &= f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

on aura

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y = \psi(x, x_0, y_0).$$

Avant d'aller plus loin nous établirons le lemme suivant :

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction de x et y continue pour tous les points du domaine (2); on aura

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{n-1} \varphi(x_v, y_v)(x_{v+1} - x_v) = \int_{x_0}^x \varphi[x, \psi(x, x_0, y_0)] dx.$$

Ayant fixé un nombre positif τ aussi petit que l'on voudra, on peut toujours, en effet, déterminer une quantité positive ε suffisamment petite pour que l'on ait

$$|\varphi(x, y') - \varphi(x, y)| < \tau,$$

tant que $|y' - y| < \varepsilon$, y', y, x étant des valeurs quelconques satisfaisant à (2). Mais on sait de plus ⁽¹⁾ qu'on peut prendre les intervalles de division suffisamment petits pour qu'on ait

$$|y_1 - \psi(x_v)| < \varepsilon, \quad v = 1, 2, \dots,$$

d'où l'inégalité

$$|\varphi(x_v, y_v) - \varphi[x_v, \psi(x_v)]| < \tau.$$

On voit que cette inégalité entraîne la suivante :

$$\left| \sum_{v=0}^{n-1} \varphi(x_v, y_v)(x_{v+1} - x_v) - \sum_{v=0}^{n-1} \varphi[x_v, \psi(x_v)](x_{v+1} - x_v) \right| < \tau p.$$

En prenant la limite des deux membres, et en observant que τ est une quantité aussi petite que l'on voudra, on trouve enfin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{n-1} \varphi(x_v, y_v)(x_{v+1} - x_v) - \int_{x_0}^x \varphi[x, \psi(x)] dx = 0.$$

Ce lemme établi, étudions maintenant y comme fonction de x_0 .

(1) Voir, par exemple, PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 294, 295.

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_1}{\partial y_0} &= 1 + f'_y(x_0, y_0)(x_1 - x_0), \\ \frac{\partial y_2}{\partial y_1} &= 1 + f'_y(x_1, y_1)(x_2 - x_1), \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{\partial y_n}{\partial y_{n-1}} &= 1 + f'_y(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}).\end{aligned}$$

Donnons à y_0 un accroissement Δy_0 , et désignons par Δy_1 , Δy_2 , ..., Δy_n , Δy les accroissements correspondants des fonctions y_1, y_2 , ..., y_n, y .

On aura les équations suivantes

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y_1}{\Delta y_0} &= 1 + f'_y(x_0, y_0 + \theta_0 \Delta y_0)(x_1 - x_0), \\ \frac{\Delta y_2}{\Delta y_1} &= 1 + f'_y(x_1, y_1 + \theta_1 \Delta y_1)(x_2 - x_1), \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{\Delta y_n}{\Delta y_{n-1}} &= 1 + f'_y(x_{n-1}, y_{n-1} + \theta_{n-1} \Delta y_{n-1})(x_n - x_{n-1}),\end{aligned}$$

où $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ sont compris entre zéro et l'unité. Je dis maintenant que si l'on a fixé un nombre positif ε aussi petit que l'on voudra, on pourra toujours déterminer un nombre positif ε tel que l'on ait

$$|\Delta y_v| < \varepsilon \quad (v = 1, 2, \dots),$$

tant que $|\Delta y_0| < \varepsilon$, $|x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Observons, à cet effet, que pour $|\Delta y_0| < \frac{\delta}{2}$, $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$, on sait (1) qu'on a

$$|y_v + \Delta y_v - y_0 - \Delta y_0| < \frac{\delta}{2},$$

d'où l'on conclut que $y_v + \Delta y_v$ appartient au domaine (2).

En désignant par M' la valeur absolue maxima de $f'_y(x, y)$ pour

(1) PICARD, *loc. cit.*

les points de ce domaine, on aura

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta y_1}{\Delta y_0} \right| &< 1 + M(x_1 - x_0) < e^{M(x_1 - x_0)}, \\ \left| \frac{\Delta y_2}{\Delta y_1} \right| &< 1 + M(x_2 - x_1) < e^{M(x_2 - x_1)}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

d'où l'on conclut que

$$\left| \frac{\Delta y_v}{\Delta y_0} \right| < e^{M \frac{\rho}{2}}, \quad v = 1, 2, \dots$$

Nous n'aurons donc qu'à prendre ε moindre que $\sigma e^{-\frac{M\rho}{2}}$ pour que l'on ait

$$|\Delta y_v| < \varepsilon,$$

tant que $|\Delta y_0| < \varepsilon$.

Ce point établi, la démonstration est immédiate.

Ayant fixé une quantité positive τ aussi petite que l'on voudra, on voit aisément que l'on peut déterminer σ assez petit pour avoir

$$|\log[1 + f'_y(x_v, y_v + \theta_v \Delta y_v)(x_{v+1} - x_v)] - f'_y(x_v, y_v)(x_{v+1} - x_v)| < \tau |x_{v+1} - x_v|,$$

tant que $|\Delta y_v| < \sigma$. D'après ce que nous venons de démontrer, on peut alors déterminer un nombre positif ε , tel que l'on ait

$$\left| \log \frac{\Delta y_{v+1}}{\Delta y_v} - f'_y(x_v, y_v)(x_{v+1} - x_v) \right| < \tau |x_{v+1} - x_v|,$$

tant que $|\Delta y_0| < \varepsilon$.

En faisant la sommation depuis $v = 0$ jusqu'à $v = n - 1$, on parvient à

$$\left| \log \frac{\Delta y_n}{\Delta y_0} - \sum_{v=0}^{n-1} f'_y(x_v, y_v)(x_{v+1} - x_v) \right| < \tau \rho.$$

Si l'on fait croître le nombre des points de division de l'intervalle $x_0 x$, la limite de Δy_n sera Δy et, ayant égard au lemme ci-dessus établi, on pourra écrire

$$\frac{\Delta y}{\Delta y_0} = e^{\int_{x_0}^x f'_y[x, \psi(x)] dx} e^{\theta \tau \rho}, \quad \text{où} \quad |\theta| < 1.$$

Faisons ensuite tendre ε vers zéro, il s'ensuit que τ tend vers

zéro, ce qui conduit à l'égalité

$$(4) \quad \frac{\partial y}{\partial y_0} = e^{\int_{x_0}^x f'_y[x, \psi(x)] dx}.$$

D'une manière tout analogue, on obtient l'équation suivante

$$\frac{\partial y}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0) e^{\int_{x_0}^x f'_y[r, \psi(r)] dr},$$

et ces deux équations mettent en évidence que la fonction y satisfait à l'équation (3).

La fonction $y = \psi(x, x_0, y_0)$ se réduisant à y_0 pour $x_0 = x$, on aura l'intégrale la plus générale de l'équation (3) qui, pour $x_0 = x$, se réduit à $\varphi(y_0)$, φ étant une fonction quelconque possédant une dérivée, si l'on prend

$$z = \varphi[\psi(x, x_0, y_0)].$$

L'équation (4) me semble enfin offrir de l'intérêt en elle-même. Dans le cas où l'on peut déterminer une fonction φ satisfaisant à l'égalité

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} f(x, y) = f'_y(x, y),$$

l'équation (4) s'écrit

$$\frac{\partial y}{\partial y_0} = e^{\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)},$$

équation qui pourrait servir à l'étude des propriétés de l'intégrale de l'équation (1). La fonction $\mu = e^{-\varphi}$ satisfaisant à

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial [\mu f(x, y)]}{\partial y} = 0,$$

on voit que $e^{-\varphi(x, y)}$ est un multiplicateur de l'équation (1).

ERRATUM.

Page 180, ligne 7, *au lieu de* : du déplacement de point (x, y, z) ,
lisez : du déplacement infiniment petit ou de la vitesse
du point (x, y, z) .

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XXIV.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.)

	Pages.
Liste des Présidents de la Société mathématique de France.....	IV
Liste des Sociétaires perpétuels.....	V
État de la Société mathématique au commencement de 1896.....	VI
Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société échange son <i>Bulletin</i>	XV
O 5kz. — Sur deux classes de surfaces analogues aux surfaces tétraédrales; par M. L. RAFFY.....	2
H 9d. — Contribution à la théorie de la fonction de Green; par M. S. ZAREMBA.....	19
M ² 4j. — Courbe d'ombre sur une surface particulière du quatrième ordre; par M. MICHEL.....	26
O 6k. — Sur un problème de déformation; par M. PAUL ADAM.....	28
H 8f. — Sur les équations homogènes; par M. E. LINDELÖF.....	35
S 2ex. — Calcul de la résistance des fluides à un disque mince; par M. TOUCHE.....	39
O 5j. — Sur les lignes asymptotiques; par M. E. GOURSAT.....	43
O 5kz. — Surfaces rapportées à un réseau conjugué azimutal; par M. L. RAFFY.....	51
H 2a. — Remarques algébriques sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre; par M. PETROVITCH.....	58
X 3. — Sur la représentation nomographique des équations du second degré à trois variables; par M. M. D'OCAGNE.....	81
J 4a. — Note sur les substitutions; par M. MAILLET.....	85
X 3. — Théorème relatif aux abaques; par M. M. D'OCAGNE.....	98
O 3d. e. — Sur une manière de représenter le rapport des deux courbures d'une courbe gauche; par M. MANGEOT.....	98
T 1a. — Mémoire sur la constitution des atomes et sur l'action de la matière sur la matière; par M. H. DUPORT.....	102
R 8d. — Sur le pendule de longueur brusquement variable; par M. L. LECORNU.....	133
P 4h. — Théorème nouveau de réversibilité algébrique; par M. DESIRÉ ANDRÉ.....	136

	Pages.
C 2h. — Le principe de dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace réglé; par M. ÉLIE CARTAN.....	140
C 2h. — Démonstration du théorème de M. Vaschy, sur une distribution quelconque de vecteur; par M. LAROSE.....	177
C 2h. — Généralisation et extension à l'espace du théorème des résidus de Cauchy; par M. E. CARVALLO.....	180
O 3e. — Sur le signe de la torsion des courbes gauches; par M. L. RAFFY.....	185
D 4a. — Sur les fonctions entières; par M. HADAMARD.....	186
O 3d, e. — Sur le rapport des deux courbures d'une courbe gauche; par M. MANNHEIM.....	188
A 3b. — Identités relatives à des polynômes entiers; par M. LAISANT.....	191
O 2dz. — Sur les centres de gravité des courbes parallèles; par M. E. DUPORCQ.	193
O 3e. — Sur le signe de la torsion des courbes gauches et du paramètre de distribution des surfaces réglées; par M. M. D'OCAGNE.....	195
T 1a. — Sur la constitution des atomes et l'action de la matière sur la matière; par M. H. DUPORT.....	197
A 1c. — Propriétés algébriques des coefficients du binôme; par M. LAISANT.....	197
D 6i. — Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques; par M. HADAMARD.....	199
II 7a. — Démonstration de l'existence de l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles linéaire; par M. BENDIXSON.....	220
<i>Erratum</i>	226
Table des matières du tome XXIV.....	227

FIN DE LA TABLE DU TOME XXIV.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

12

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE,

PUBLIÉ

PAR LES SECRETAIRES.

TOME VINGT-CINQUIÈME. — ANNÉE 1897.

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7

1897

1897 - XV
126
21

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1897 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau	MM. BERTRAND. CREMONA. DARBOUX. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. HERMITE. JORDAN.
--------------------------------------	--

Président	MM. PICARD.
Vice-Présidents	DE COMBEROUSSE. GUYOU. D'OCAGNE. POINCARÉ.
Secrétaires	CARVALLO. RAFFY.
Vice-Secrétaires	BLUTEL. DUPORCQ.
Archiviste	BIOCHE.
Trésorier	CLAUDE-LAFONTAINE.

Membres du Conseil ⁽²⁾	ANDRÉ, 1899. APPELL, 1900. FOURET, 1899. GOURSAT, 1898. HUMBERT, 1898. LAISANT, 1898. LECORNU, 1900. MANNHEIM, 1900. KOENIGS, 1898. PICQUET, 1900. ROUCHE, 1899. VICAIRE, 1899.
---	--

(¹) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(²) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
la mission.

1872. ACHARD, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 bis, à Paris.
1893. ADAM (Paul), ingénieur des ponts et chaussées, docteur ès sciences mathématiques, avenue de Villars, 2, à Paris.
1881. AMIGUES, professeur au lycée, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1896. ANDOYER, maître de conférences et chargé de cours à la Faculté des Sciences, avenue d'Orléans, 5, à Paris.
1894. ANDRADE, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Poullain-Duparc, 7, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1872. ANDRÉ (Désiré), docteur ès sciences mathématiques, rue Vanquelin, 28, à Paris.
1890. ANTONARI, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée Carnot, rue Daubigny, 11 bis, à Paris.
1879. APPELL, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Le Verrier, 6, à Paris.
1892. ARNOIX (G.), ancien officier de marine, aux Mées (Basses-Alpes).
1881. ASTOR, professeur à la Faculté des Sciences, place Victor-Hugo, 11, à Grenoble (Isère).
1882. AUTONNE, ingénieur des ponts et chaussées, rue Mont-Bernard, 9, à Lyon (Rhône).
1896. BAKER, professeur à l'Université, Toronto (Canada).
1894. BALITRAND, lieutenant du génie, à Tunis (Tunisie).
1889. BEGHIN (Maurice), ancien élève de l'École Polytechnique, rue de Bourgogne, 40, à Paris.
1875. BERDELLÉ, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
1873. BERTRAND (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, membre de l'Académie française, rue de Tournon, 4, à Paris.
1895. BEUDOV, docteur ès sciences, professeur au lycée, à Alger (Algérie).
1872. BIEVAYRÉ (Arthur), inspecteur général du génie maritime en retraite, rue Revel, 14, à Toulon (Var).
1888. BLOCHE, professeur au collège Stanislas, rue Vavin, 5, à Paris.
1875. BISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut, rue Taitbout, 3, à Paris.
1891. BLUTEL, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée Saint-Louis, rue Claude-Bernard, 65, à Paris.
1892. BOYAPARTE (prince Roland), avenue d'Iéna, 10, à Paris.
1895. BOREL (Ém.), maître de conférences à l'École Normale supérieure, rue Toullier, 7, à Paris.
1896. BOLLANGER, professeur à l'Institut industriel, rue Cammartin, 80, à Lille (Nord).
1893. BOURGET (Henry), maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Saint-Jacques, 20, à Toulouse (Haute-Garonne).
1896. BOIBLET, professeur à l'École des Beaux-Arts et au lycée Henri IV, avenue de l'Observatoire, 22, à Paris.
1886. BRAULT DE BOURNOUVILLE, boulevard de Talence, 150, à Bordeaux (Gironde).
1874. BRIOSCHI, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École Polytechnique, à Milan (Italie).
1872. BRISSE (Ch.), professeur à l'École Centrale, rue Vanquelin, 18, à Paris.
1873. BROCARD, chef de bataillon du génie en retraite, Ville-Haute, 75, à Bar-le-Duc (Meuse).
1886. BRUMEL, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1893. BURKHARDT, privat-docent à l'Université, Gruner Weg, 4, à Göttingue (Allemagne).
1894. CAMEY, professeur au lycée Condorcet, rue des Vignes, 30, à Paris.

Date
de
l'admission.

1893. CALDABERA, professeur à l'Université, palazzo Giampaolo, via della Libertà, à Palerme (Italie).
1888. CAYET (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie de MM. Schneider et C^{ie}, boulevard Malesherbes, 1, à Paris.
1885. CARON, professeur de géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 82, à Paris.
1892. CARONNET, docteur ès sciences mathématiques, rue Barye, 10, à Paris.
1896. CARTAN, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Suchet, 38, à Lyon (Rhône).
1887. CARVALLO, répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue de Courty, 1, à Paris.
1887. CASPARY, professeur à l'École d'Architecture, Genthinerstrasse, 42, à Berlin (Allemagne).
1890. CEDERCREUTZ (baronne Nanny, née de Lagerborg), Georgsgatan, 22, à Helsingfors (Finlande).
1892. CELLÉRIER (Gustave), boulevard de Port-Royal, 48, à Paris.
1896. CELS, professeur au lycée Lakanal, avenue d'Orléans, 12, à Paris.
1887. CERRUTI, professeur à l'Université, rue d'Azeglio, 16, à Rome (Italie).
1888. CHAILAN (Édouard), rue Berthollet, 16, à Paris.
1893. CHARLIAT, ingénieur des arts et manufactures, rue de Paradis, 46, à Paris.
1896. CHARVE, professeur à la Faculté des Sciences, cours Pierre-Puget, 60, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1881. CHEMIN, ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue Montaigne, 33, à Paris.
1884. CHRYSTAL, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
1875. CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris.
1872. COLLIGNON, inspecteur général des ponts et chaussées, rue de Seine, 6, à Paris.
1890. COLLOT, villa Sully, à Arcachon (Gironde).
1875. COMBEROUSSE (DE), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Centrale, rue Saint-Lazare, 94, à Paris.
1896. COISSERAT (E.), professeur à la Faculté des Sciences, rue de Metz, 1, à Toulouse (Haute-Garonne).
1896. COISSERAT (F.), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, rue d'Alsace, 23, à Paris.
1896. COURTIV, chef de bataillon du génie en retraite, rue des Bernardins, 48, à Paris.
1884. CRAIG (Thomas), professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1877. CREMONA, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome (Italie).
1872. DARBOUX, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
1885. DAUTHVILLE, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1881. DEFFORGES, chef de bataillon d'infanterie, attaché à l'Etat-major du Ministre de la Guerre, boulevard Latour-Maubourg, 1, à Paris.
1882. DELANYOY, sous-intendant militaire en retraite, à Guéret (Creuse).
1895. DELAUNAY (N.), professeur à l'Institut agronomique, à Novo-Alexandria (Russie).
1885. DEMATRES, doyen de la Faculté des Sciences, à Lille (Nord).
1892. DEMOLLIN (Alph.), docteur en sciences mathématiques et physiques, répétiteur à l'Université, place Laurent, 10, à Gand (Belgique).
1896. DENVER, rue Jouffroy, 93, à Paris.

Date
de
l'admission.

1895. DERVENGHEM, licencié ès sciences, rue de Miromesnil, 4, à Paris.
1883. DERUYS, docteur ès sciences, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
1894. DESAINT, licencié ès sciences mathématiques, place Corneille, 10, à Levallois-Perret (Seine).
1896. DUAS (Gustave), assistant à l'École Polytechnique fédérale, Freigutstrasse, 20, à Zurich (Suisse).
1886. DUCAN, professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1895. DUPÔRCQ (Ernest), ingénieur des télégraphes, rue Jacob, 58, à Paris.
1896. DUPÔRT (Henry), professeur à la Faculté des Sciences, rue Colonel-de-Grancey, 1, à Dijon (Côte-d'Or).
1872. DURRANDE, doyen de la Faculté des Sciences, à Poitiers (Vienne).
1885. DYCK (Walther), professeur au Polytechnicum, à Munich (Bavière).
1896. EIVERTÉ, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, rue de Seine, 4, à Paris.
1888. FABRY, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1891. FAUQUENBERGUE, professeur au lycée de la Rochelle.
1892. FEHR (Henri), *privat-docent* à l'Université, rue Gevrey, 15, à Genève (Suisse).
1885. FIELDS (John), professeur de mathématiques, Nienburgerstrasse, 18, à Berlin (Allemagne).
1893. FLEURY, ancien chef d'institution, rue de la Santé, 46, à Paris.
1881. FLOQUET, professeur à la Faculté des Sciences, rue Saint-Lambert, 17, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1872. FLYE SAUNTE-MARIE, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1896. FONTANEAU, ancien officier de marine, cours Bugeaud, 8, à Limoges (Haute-Vienne).
1895. FONTÈS, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Romiguières, 3, à Toulouse (Haute-Garonne).
1891. FONTVIGLANT (DE), professeur à l'École Centrale, rue d'Erlanger, 29, Paris-Auteuil.
1889. FOUCHÉ, professeur de mathématiques, rue Soufflot, 5, à Paris.
1872. FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris.
1892. FRÉLOY (le général), quai Pierre-Fatio, 10, à Genève (Suisse).
1872. GARIEL, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris.
1872. GAUTHIER-VILLARS, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris.
1896. GAUTHIER-VILLARS (Albert), ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris.
1890. GERBA, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. GENTY (E.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue de Vaugirard, 207, à Paris.
1890. GENTY (Max), enseigne de vaisseau, en escadre, à Toulon (Var).
1893. GÉRARD, docteur ès sciences, professeur au lycée, à Lyon (Rhône).
1890. GERBALDI, professeur à l'Université, via Daita, 11, à Palerme (Italie).
1896. GIBARDVILLE, capitaine d'artillerie, avenue Maiguy, 133, à Fontenay-sous-Bois (Seine).
1881. GILBERT, maître de conférences à l'École Normale supérieure, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Arago, 119, à Paris.

Date
de
l'admission.

1896. GREENHILL, professeur à l'École d'artillerie, à Woolwich (Grande-Bretagne).
1896. GRÉVY, professeur au lycée Condorcet, à Paris.
1896. GRIESS, professeur au lycée Charlemagne, rue Mouge, 18, à Paris.
1880. GUCCIA (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Italie).
1891. GUIMARAES, officier du génie, à l'Académie des Sciences, rue Arco de Jesus, à Lisbonne (Portugal).
1881. GUNTHER (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1835. GUYOU, membre de l'Institut, capitaine de frégate, rue de l'Université, 13, à Paris.
1873. HAAG, ingénieur en chef des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 11 *bis*, à Paris.
1882. HABICH, directeur de l'École des mines, à Lima (Pérou).
1896. HADAMARD, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1894. HALSTED, professeur à l'Université du Texas, Guadalupe Street, 2407, à Austin (Texas).
1872. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur de l'École des mines, boulevard Saint-Michel, 60, à Paris.
1872. HENRY, inspecteur général des ponts et chaussées, boulevard St-Germain, 22, à Paris.
1892. HERMANN, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris.
1873. HERMITE, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris.
1893. HOUX, professeur en retraite, rue des Fossés Saint-Jacques, 16, à Paris.
1879. HOLST (Elling), professeur à l'École Polytechnique, Pilestrade, 49, à Christiania (Norvège).
1895. HOTT (Stanislas), professeur à l'École St^e-Geneviève, rue Malebranche, 17, à Paris.
1872. HUBICANT, chef de bataillon du génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
1880. HUMBERT, ingénieur des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue de l'Arcade, 24, à Paris.
1881. IMBER, directeur des études à l'École Centrale, rue Montgolfier, 1, à Paris.
1887. ISSALY (l'abbé), rue Margaux, 16, à Bordeaux (Gironde).
1896. JACQUET, professeur de mathématiques, rue des Capucins, 21 *bis*, à Chartres (Eure-et-Loir).
1873. JANIN, chef d'escadron au 15^e régiment d'artillerie, à Douai (Nord).
1872. JAVARY, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris.
1872. JORDAN, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varenne, 48, à Paris.
1872. JOUFFRET, lieutenant-colonel d'artillerie, rue Carnot, 24, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
1875. JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur, via Borgonuovo, 9, à Milan (Italie).
1890. KÖBE (Gustaf), maître de conférences à l'Université, à Stockholm (Suède).
1892. KOCH (H. von), maître de conférences à l'Université, Engelbrektsgatan, 43 B, à Stockholm (Suède).
1880. KÖNIGS, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard de Port-Royal, 72, à Paris.
1881. LACOR, professeur de mathématiques, boulevard du Mont-Parnasse, 96, à Paris.
1873. LAISANT, docteur ès sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris.
1893. LANCELIN, boulevard Arago, 97, à Paris.
1896. LAROSE, ingénieur des télégraphes, Usine de La Seyne (Var).
1896. LARGEL, ancien attaché d'ambassade, villa des Bruyères, au Golfe Juan (Alpes-Maritimes).

Date
de
l'admission.

1873. LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
1896. LEAU, professeur au lycée, avenue de la Gare, 57, à Brest (Finistère).
1880. LÉAUTÉ, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris.
1896. LEBEL, professeur au lycée, place du Château, 9, à Rennes (Ile-et-Vilaine).
1893. LECORNU, répétiteur à l'École Polytechnique, ingénieur en chef des mines, rue Gay-Lussac, 3, à Paris.
1895. LÈMERAY, ingénieur civil du génie maritime, villa des Troènes, à la Seyne-sur-Mer, par Toulon (Var).
1872. LEMOINE (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Littré, 5, à Paris.
1879. LE PAIGE, professeur à l'Université, à l'observatoire de Cointe, à Liège (Belgique).
1895. LE ROUX, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1891. LERY, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1872. LESPIAULT, doyen honoraire de la Faculté des Sciences de Bordeaux, à Nérac (Lot-et-Garonne).
1896. LE VASSEUR, professeur au lycée, Grande Allée, 23, à Toulouse (Haute-Garonne).
1882. LÉVY (Lucien), répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue de Conde, 29, à Paris.
1872. LÉVY (Maurice), membre de l'Institut, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur au Collège de France, avenue du Trocadero, 15, à Paris.
1875. LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1873. LIGUINE, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
1877. LIXDEMANN, professeur à l'Université, Georgenstrasse, 40, à Munich (Bavière).
1886. LIQUILLE, ingénieur des poudres, répétiteur à l'École Polytechnique, rue des Ecoles, 6 bis, à Paris.
1880. LORIX, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Faubourg-Saint-Honoré, 186, à Paris.
1888. LUCAS (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Freycinet, 26, à Paris.
1886. LYON, docteur ès sciences mathématiques, chemin de la Roseraie, 26, à Genève (Suisse).
1882. MACÉ DE LÉPINAY, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV, rue Claude-Bernard, 63, à Paris.
1895. MAILLET, docteur ès sciences, ingénieur des ponts et chaussées, à Trilport (Seine-et-Marne).
1875. MALLOIZEL, professeur de mathématiques, rue de l'Estrapade, 7, à Paris.
1892. MANGEOT, docteur ès sciences mathématiques, quai des Comtes de Champagne, 29, à Troyes (Aube).
1872. MANNHEIM, colonel d'artillerie en retraite, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris.
1884. MARTIN (Artemas), Columbia street, 1534, N. W. à Washington D. C. (États-Unis d'Amérique).
1889. MARTIN (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, rue du Mont-Parnasse, 25, à Paris.
1894. MAUPIN, surveillant général au lycée, à Nantes (Loire-Inférieure).
1889. MENDIZABAL LAMBOREL (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique).
1884. MERCIERAI, licencié ès sciences, rue de l'Université, 103, à Paris.
1893. MICHEL (François), rue Perdonnet, 8, à Paris.

Date
de
l'admission.

1873. MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1872. MOUTARD, inspecteur général des mines, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1888. MUKHOPADHYAY (Asutosh), professeur de mathématiques, Russa Road, 77, North Bhowanipore, à Calcutta (Inde).
1885. NEUBERG, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1882. OCAGNE (M. p'), ingénieur des ponts et chaussées, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Vienne, 5, à Paris.
1873. OVIDIO (Enrico p'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1893. PAIXLEVÉ, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences, professeur suppléant au Collège de France, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Rennes, 99, à Paris.
1888. PAPELIER (Georges), professeur de mathématiques spéciales au lycée, rue de Reconvrance, 20, à Orléans (Loiret).
1884. PARAF, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
1872. PARMENTIER, général du génie en retraite, rue du Cirque, 5, à Paris.
1872. PARRAN, ingénieur en chef des mines, rue des Saints-Pères, 56, à Paris.
1884. PACTOXNIER (l'abbé), professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 19, à Paris.
1881. PELLET, doyen de la Faculté des Sciences, rue Ballainvilliers, 7, à Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).
1883. PELLETREAU, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Constantine (Algérie).
1874. PERCIN, lieutenant-colonel d'artillerie, inspecteur des manufactures d'armes, rue de Vaugirard, 20, à Paris.
1881. PEROTT (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts).
1873. PERRIN, ingénieur en chef des mines, rue Joinville, 25, au Mans (Sarthe).
1892. PERRIN (Élie), professeur de mathématiques, rue Lamandé, 7, à Paris.
1896. PETROVITCH, professeur à l'Université, Kossanteh-Venac, 24, à Belgrade (Serbie).
1887. PEZZO (DEL), professeur à l'Université, via Gennaro Serra, 75, à Naples (Italie).
1879. PICARD (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Soufflot, 13, à Paris.
1872. PICQUET, chef de bataillon du génie, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue de Condé, 24, à Paris.
1896. PIÉRON, inspecteur général de l'Instruction publique, rue d'Assas, 50, à Paris.
1882. POINCARÉ, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris.
1882. POKORNY (Martin), directeur du lycée communal, à Prague (Bohême).
1872. POLIGNAC (prince C. DE), villa Jessie, à Cannes (Alpes-Maritimes).
1896. PREVOST, inspecteur général de l'Instruction publique, 11, rue de la Tour, Paris-Passy.
1872. PUTZ, général d'artillerie en retraite, rue Saint-Merry, 98, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
1896. QUIQUET, archiviste de la Compagnie *la Nationale*, rue de Grammont, 13, à Paris.
1872. RADAI, rue de Tournon, 12, à Paris.
1883. RAFFY, chargé de cours à la Faculté des Sciences, maître de conférences à l'École Normale supérieure, rue Nicole, 7, à Paris.
1893. RIVEREAU (l'abbé), professeur à l'Institut catholique, à Angers (Maine-et-Loire).
1872. ROUART, ingénieur civil, rue de Lisbonne, 32, à Paris.

Date
de
l'admission.

1872. ROUCÉ (Eugène), membre de l'Institut, professeur au Conservatoire des arts et métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
1896. ROIGIER, docteur ès sciences, professeur au lycée, à Toulon (Var).
1885. ROQUET, professeur de mathématiques spéciales au lycée, place de l'École-d'Artillerie, 2, à Toulouse (Haute-Garonne).
1881. SAINT-PAUL (DUCP DE), lieutenant-colonel d'artillerie en retraite, rue Saint-Sauveur, 13, à Perpignan (Pyrénées-Orientales).
1896. SANCHEZ, directeur de l'observatoire, à San Salvador (République de San Salvador).
1889. SARAZ, professeur de mathématiques, rue Saint-Jacques, 220, à Paris.
1872. SARRAU, membre de l'Institut, ingénieur en chef des poudres, professeur à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 bis, à Saint-Mande (Seine).
1872. SARTIAUX, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. SAUVAGE, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1881. SCHLEGEL (Dr Victor), professeur à l'École technique, Volmestrasse, 62, à Hagen (Allemagne).
1881. SCHOLTE, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1896. SÉGUIER (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue de Sèvres, 35, à Paris.
1882. SÉLIVANOFF (Démétrius), attaché à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
1881. STARKOFF (Alexis), professeur à l'École de commerce, Deribasowskaja, 6, à Odessa (Russie).
1879. STEPHANOS (Dr Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
1873. STUDNICKA, professeur à l'Université, à Prague (Bohême).
1872. SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norvège).
1896. TANNENBERG (W. DE), chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue du Japon, 12, à Toulouse (Haute-Garonne).
1872. TANNERY (Paul), directeur des manufactures de l'État, Pantin.
1875. TANNERY (Jules), sous-directeur à l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.
1882. TARRY (Gaston), inspecteur des Contributions diverses, à Boufarik.
1872. TERRIER, professeur au collège Chaptal, rue Larribe, 3, à Paris.
1873. TISSOT, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Voreppe (Isère).
1896. TISSOT, enseigne de vaisseau, professeur au *Borda*, à Brest (Finistère).
1896. TORRÉS, ingénieur des ponts et chaussées, Valgame Dios, 3, à Madrid (Espagne).
1893. TOUCHE, lieutenant-colonel d'artillerie territoriale, rue Truffault, 23, à Paris.
1872. TRESCA, ingénieur en chef des ponts et chaussées, boulevard Inkermann, 27, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1896. TRESSE, docteur ès sciences, professeur au lycée, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1893. VALLEÉ-POISSIN (Ch.-J. DE LA), professeur à l'Université, rue de Namur, 190, à Louvain (Belgique).
1880. VANECEK (J.-S.), professeur au lycée, à Jicin (Bohême).
1890. VASCHY, répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Bosquet, 68, à Paris.
1876. VICARE, inspecteur général des mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
1888. VITO VOLTERRA, via S. Quintino, 45, à Turin (Italie).
1893. WAGNER, professeur à l'École J.-B. Say, boulevard Flandrin, 70, à Paris.

Date
de
l'admission.

1880. WALCKENAER, ingénieur des mines, boulevard Saint-Germain, 218, à Paris.
 1879. WEILL, professeur au collège Chaptal, 19, rue Thiers, au Vésinet (Seine-et-Oise).
 1873. WEYR (Dr Edouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohême).
 1878. WORMS DE BOMILLY, ingénieur en chef des mines, rue Balzac, 7, à Paris.
 1882. ZABOUDSKI, membre du Comité d'artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie, à Saint-Petersbourg (Russie).
 1890. ZAREMBA, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée, rue des Fours à chaux, 25, à Nîmes (Gard).
 1881. ZEUTHEN, professeur à l'Université, Ostersogade, 10, à Copenhague (Danemark).

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

BENOIST (décédé). — BERDELLÉ, à Rioz. — BIENAIMÉ (décédé). — BLOCHE, à Paris. —
 BISCHOFFSHEIM, à Paris. — BORCHARDT (décédé). — BBOCARD, à Bar-le-Duc. — CANET,
 à Paris. — CARVALLO, à Paris. — CHASLES (décédé). — CLAUDE-LAFONTAINE, à Paris.
 — FOURET, à Paris. — GAUTHIER-VILLARS, à Paris. — GOIRSAT, à Paris. — HALPHEN
 (décédé). — HALSTED, à Austin. — HATON DE LA GOUPILLIÈRE, à Paris. — HERMITE, à
 Paris. — HIRST (décédé). — HOTT, à Paris. — LÉAUTÉ, à Paris. — JORDAN, à Paris.
 — LAFFON DE LABÉDAT (décédé). — MANNHEIM, à Paris. — DE MENDIZABAL TAMBOREL,
 à Mexico. — MERCEREAU, à Paris. — D'OCAGNE, à Paris. — PEROTT, à Worcester. —
 PERRIN, au Mans. — POINCARÉ, à Paris. — POLIGNAC (prince C. DE), à Cannes. — RAFFY,
 à Paris. — SYLOW, à Frederikshald. — TANNERY (Paul), à Paris. — TARRY, à Alger. —
 TCHEBICHEF (décédé). — VIELLARD (décédé).

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

MM.	
1873	CHASLES.
1874	LAFFON DE LADÉBAT.
1875	BIENAIMÉ.
1876	DE LA GOURNERIE.
1877	MANNHEIM.
1878	DARBOUX.
1879	O. BONNET.
1880	JORDAN.
1881	LAGUERRE.
1882	HALPHEN
1883	ROUCHE.
1884	PICARD.
1885	APPELL.

MM.	
1886	POINCARÉ.
1887	FOURET.
1888	LAISANT.
1889	DÉSIRÉ ANDRÉ.
1890	HATON DE LA GOUPILLIÈRE.
1891	COLLIGNON.
1892	VICAIRE.
1893	HUMBERT.
1894	PICQUET.
1895	GOURSAT.
1896	KÖNIGS.
1897	PICARD.

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	<i>Revue semestrielle des publications mathématiques.</i>	Hollande.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics.</i>	États-Unis
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Archiv für Mathematik und Physik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik.</i>	Allemagne.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.....	Société philosophique de Cambridge.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturevidenskab.</i>	Norvège.
Coimbre.....	<i>Journal de Sciencias mathematicas e astronomicas.</i>	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik.</i>	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	École Polytechnique de Delft.	Hollande.
Dresde.....	<i>Zeitschrift für Mathematik und Physik.</i>	Allemagne.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	<i>Mathesis.</i>	Belgique.
Goettingue.....	Société Royale des Sciences de Goettingue.	Allemagne.
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Russie.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkov.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkov.....	Société mathématique de Kharkov.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen.</i>	Allemagne.
Liège.....	Société Roy des Sciences.	Belgique.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg.....	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.</i>	France.
Mexico.....	Sociedad científica Antonio Alzate.	Mexique.

Milan	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis d'Amérique.
Odessa	Société mathématique d'Odessa.	Russie.
Palerme	<i>Rendiconti del Circolo matematico.</i>	Italie.
Paris	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris	Société philomathique de Paris.	France.
Paris	<i>Bulletin des Sciences mathématiques.</i>	France.
Paris	<i>Journal de l'École Polytechnique.</i>	France.
Paris	<i>Journal de Mathématiques élémentaires.</i>	France.
Paris	<i>Journal de Mathématiques spéciales.</i>	France.
Paris	Institut des Actnaires français.	France.
Pise	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise	<i>Il Nuovo Cimento.</i>	Italie.
Prague	Académie des Sciences de Prague.	Autriche.
Prague	<i>Casopis pro pestování matematiky a fysiky.</i>	Autriche.
Prague	Société mathématique de Prague.	Autriche.
Rome	Académie Royale des Lincei.	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm	<i>Acta Mathematica.</i>	Suède.
Toulouse	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.</i>	France.
Upsal	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Venise	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik.</i>	Autriche.
Zurich	Société des Sciences naturelles de Zurich.	Suisse.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 JANVIER 1897.

PRÉSIDENTE DE M. KOENIGS.

La Société, réunie en assemblée générale, procède au renouvellement de son bureau et à l'élection de membres du Conseil.

Communications :

M. Boulanger : *Sur l'équation de la propagation de la chaleur.*

M. Girardville : *Sur la théorie du vol des oiseaux.*

MM. Touche et Lecornu présentent des observations sur le même sujet.

M. RAFFY fait la Communication suivante :

Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces.

Commençons par rappeler les formules dont il s'agit. Soient E, F, G les coefficients de l'élément linéaire d'une surface, D, D', D'' les déterminants qui figurent dans l'équation différentielle des lignes asymptotiques. Si l'on pose

$$\Delta = \frac{D}{H^2}, \quad \Delta' = \frac{D'}{H^2}, \quad \Delta'' = \frac{D''}{H^2}, \quad H^2 = EG - F^2,$$

et qu'on désigne par $-k^2$ le produit des courbures principales, on a les relations

$$(1) \quad \Delta \Delta'' - \Delta'^2 = -k^2,$$

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Delta'}{\partial u} - \frac{\partial \Delta}{\partial v} = C_1 \Delta - 2B_1 \Delta' + A_1 \Delta'', \\ \frac{\partial \Delta}{\partial v} - \frac{\partial \Delta''}{\partial u} = C_1 \Delta - 2B_1 \Delta' + A_1 \Delta'', \end{cases}$$

où A, B, C, A_1, B_1, C_1 désignent six fonctions connues de E, F, G et de leurs dérivées premières, savoir

$$\begin{aligned} A &= \frac{GE'_u + FE'_v - 2FF'_u}{2H^2}, & A_1 &= \frac{2EF'_u - FE'_u - EE'_v}{2H^2}, \\ B &= \frac{GE'_v - FG'_u}{2H^2}, & B_1 &= \frac{EG'_u - FE'_v}{2H^2}, \\ C &= \frac{2GF'_v - FG'_v - GG'_u}{2H^2}, & C_1 &= \frac{EG'_v + FG'_u - 2FF'_v}{2H^2}. \end{aligned}$$

Les équations (1) et (2) sont les formules fondamentales de la théorie des surfaces : on sait qu'une surface est entièrement déterminée de forme, quand on connaît son élément linéaire et un système de trois fonctions $\Delta, \Delta', \Delta''$, satisfaisant à ces conditions.

Nous allons exprimer $\Delta, \Delta', \Delta''$ au moyen d'une seule fonction auxiliaire t , qui sera déterminée (si l'on donne E, F, G) par une équation aux dérivées partielles du second ordre. A cet effet, introduisons la courbure moyenne

$$(3) \quad h = \frac{G\Delta - 2F\Delta' + E\Delta''}{2H}.$$

On satisfait aux deux équations (1) et (3) en posant

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta = \frac{2Hh - 2k(Et + F)}{Et^2 + 2Ft + G}, \\ \Delta' = \frac{-2Hht + k(Et^2 - G)}{Et^2 + 2Ft + G}, \\ \Delta'' = \frac{2Hht^2 + 2k(Ft^2 + Gt)}{Et^2 + 2Ft + G}. \end{cases}$$

Pour trouver la signification de t , il suffit de former l'équation différentielle des lignes asymptotiques

$$\Delta du^2 - 2\Delta' du dv + \Delta'' dv^2 = 0;$$

comme elle s'écrit

$$(du - t dv) \{ [k(Et + F) - Hh] du + [k(Ft + G) + Hht] dv \} = 0,$$

on voit que t est la valeur du rapport $du : dv$ qui correspond à l'une des lignes asymptotiques.

Si maintenant on substitue les expressions (4) dans les équations (2), on a, entre h et t , deux équations aux dérivées partielles du premier ordre, qui sont telles qu'en éliminant entre elles l'une des dérivées de h on élimine en même temps l'autre. Ainsi la courbure moyenne s'exprime explicitement en fonction des coefficients de l'élément linéaire, ainsi que de la fonction t et de ses dérivées premières; il en est de même des coefficients Δ , Δ' , Δ'' à raison des formules (4). Il n'y a exception que si h se présente sous la forme 0 : 0. Cette hypothèse caractérise les surfaces réglées et conduit aux déformations bien connues qui dépendent d'une fonction arbitraire.

La substitution de h dans l'une des deux équations (2) conduit à une équation aux dérivées partielles du second ordre pour la fonction t . Mais cette équation, dont dépend la détermination de toutes les surfaces ayant un élément linéaire donné, est LINÉAIRE par rapport aux dérivées secondes, tandis que toutes les équations antérieurement données pour résoudre le problème de la déformation contiennent ces dérivées au second degré. Elle admet pour caractéristiques les lignes asymptotiques des surfaces cherchées.

SÉANCE DU 20 JANVIER 1897.

PRÉSIDENTE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. Laisant : *Sur l'organisation des Congrès internationaux de mathématiciens.*

M. Raffy : *Sur les lignes asymptotiques des développées des surfaces à courbure totale constante.*

M. Maillet adresse un Mémoire intitulé : *Des groupes primitifs de classe N — 1 et de degré N.*

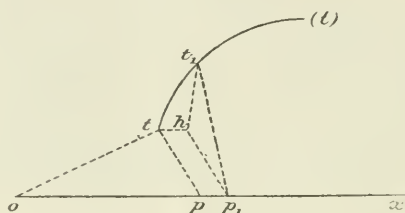
M. MANNHEIM adresse la Communication suivante :

Sur les formules de Frenet.

On donne une courbe (m) . On mène en un de ses points m sa tangente T , sa normale principale N et sa binormale B . Appelons, τ, ν, β les angles de ces droites avec un axe ox .

Du point o (fig. 1) comme centre décrivons une sphère de

Fig. 1.



rayon 1 et menons de o le rayon ot parallèlement à T . Le lieu des points tels que t , lorsqu'on fait varier la position de la tangente à (m) , est une courbe (t) . Le cône de sommet o , dont la directrice est (t) , a pour plan tangent suivant ot un plan parallèle au plan osculateur de (m) en m .

La tangente en t à (t) est dans ce plan tangent, et comme cette droite est perpendiculaire à ot , elle est parallèle à N .

Du point t et du point t_1 , infiniment voisin de t sur (t) , abaissons sur ox les perpendiculaires tp, t_1p_1 . Menons p_1h parallèlement à pt et th parallèlement à ox . L'angle que fait th avec tt_1 est alors égal à ν . Dans le triangle htt_1 on a : $th = tt_1 \cos \nu$.

Comme l'angle xot est égal à τ , cette égalité montre que

$$(1) \quad d \cos \tau = tt_1 \cos \nu;$$

tt_1 est égal à l'angle de contingence de (m) pour le point m ; si l'on appelle $d(m)$ un arc infiniment petit de (m) et ρ le rayon de courbure de (m) en m , on a alors $tt_1 = \frac{d(m)}{\rho}$ et la relation (1) s'écrit

$$(2) \quad d \cos \tau = \frac{d(m)}{\rho} \cos \nu.$$

Appliquons la formule (1) à l'arête de rebroussement (m') de la surface développable enveloppe des plans normaux à (m) . Dans le plan normal issu de m , il y a l'axe de courbure de (m) , qui est une génératrice de cette surface : appelons m' le point où cette génératrice, qui est parallèle à B, touche l'arête de rebroussement (m') . La normale principale de cette courbe pour m' est parallèle à N. L'angle de contingence de (m') pour m' est égal à l'angle que le plan osculateur de (m) en m fait avec le plan osculateur de (m) pour le point infiniment voisin de m : cet angle est égal à $\frac{d(m)}{r}$, en appelant r le rayon de seconde courbure de (m) en m .

La formule (2), appliquée à (m') et exprimée au moyen des éléments de (m) , donne alors

$$(3) \quad d \cos \beta = \frac{d(m)}{r} \cos \nu.$$

Les formules (2) et (3) sont deux des formules de Frenet; on sait qu'il est facile d'en déduire la troisième.

M. TOUCHE fait la Communication suivante :

Équations d'une trajectoire fluide dans le cas général.

Soit mn un élément de trajectoire et nr un élément de la normale principale à la trajectoire en n . Nous pouvons choisir le point r de telle manière que la pression en ce point soit la même qu'au point m .

Soit $mn = ds$ et $nr = ds_1$; nous pouvons aussi choisir sur nr un point r' tel que la projection de la tangente à la trajectoire qui passe par ce point, sur le plan osculateur relatif au point m , soit parallèle à la tangente en m à la trajectoire; soit $nr' = ds'_1$.

La première des équations générales du mouvement des fluides transformées nous donne

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} ds = U ds - \frac{dv_1}{dt} ds - v_1 \frac{dv_1}{ds} ds$$

et la seconde

$$(2) \quad -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} ds_1 = -U' ds_1 - v_1 \frac{dx_1}{dt} ds_1 - v_1^2 \frac{dx}{ds} ds_1.$$

Remarquons que la variation de pression de m en n est la même que celle de r en n , puisque m et r ont la même pression; donc, dans les équations (1) et (2) les premiers membres sont égaux et l'on a

$$v_1 \frac{dv_1}{ds} ds = U ds - \frac{dv_1}{dt} ds + U' ds_1 + v_1 \frac{dx_1}{dt} ds_1 + v_1^2 \frac{dx}{ds} ds_1,$$

ou

$$(3) \quad \frac{1}{v_1} \frac{dv_1}{ds} ds = \frac{1}{v_1^2} U ds + \frac{1}{v_1^2} U' ds_1 - \frac{1}{v_1^2} \frac{dv_1}{dt} ds + \frac{1}{v_1} \frac{dx_1}{dt} ds_1 + \frac{dx}{ds} ds_1.$$

L'équation de continuité transformée nous donne

$$(4) \quad \frac{1}{v_1} \frac{dv_1}{ds} ds = \frac{\partial x}{\partial s'} ds + \frac{\partial' x}{\partial s''} ds - \frac{1}{\rho v_1} \frac{dp}{dt} ds - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} ds.$$

Les deux premiers membres de (3) et (4) étant égaux, on aura

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial s'} ds + \frac{\partial' x}{\partial s''} ds = \frac{dx}{ds} ds_1 + \frac{1}{v_1^2} U ds + \frac{1}{v_1^2} U' ds_1 - \frac{1}{v_1^2} \frac{dv_1}{dt} ds \\ \quad \quad \quad + \frac{1}{v_1} \frac{dx_1}{dt} ds_1 + \frac{1}{\rho v_1} \frac{dp}{dt} ds + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} ds. \end{array} \right.$$

Comme la tangente à la trajectoire en m est parallèle à la projection, sur le plan osculateur, de la tangente en r' à la trajectoire qui passe par ce point, dx représente à la fois l'angle des deux tangentes à la trajectoire en m et en n et l'angle des deux tangentes en r' et en n aux trajectoires qui passent par ces points; or, ce dernier angle est

$$- \frac{\partial x}{\partial s'} ds'_1$$

et l'on aura

$$- \frac{\partial x}{\partial s'} ds'_1 = \frac{dx}{ds} ds$$

ou

$$\frac{\partial x}{\partial s'} ds = - \frac{dx}{ds} \frac{ds}{ds'_1} ds,$$

et en substituant dans (5) il vient

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta' \alpha}{ds''} ds &= \frac{dx}{ds} \left(\frac{ds_1}{ds} + \frac{ds}{ds'_1} \right) ds + \frac{1}{v_1^2} U ds + \frac{1}{v_1^2} U' ds_1 \\ &\quad - \frac{1}{v_1^2} \frac{dv_1}{dt} ds + \frac{1}{v_1} \frac{dx_1}{dt} ds_1 + \frac{1}{\rho v_1} \frac{d\rho}{dt} ds + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} ds. \end{aligned} \right.$$

Comme pour l'équation d'une trajectoire dans un cas particulier, on a dans le cas général

$$\frac{\delta' \alpha}{ds''} ds = \frac{dx}{x},$$

en prenant pour axe des y l'intersection du plan osculateur passant par le point m avec le plan osculateur passant par un point très voisin sur la même trajectoire. En substituant, nous obtenons l'équation

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{dx}{ds} \left(\frac{ds_1}{ds} + \frac{ds}{ds'_1} \right) ds + \frac{1}{v_1^2} U ds + \frac{1}{v_1^2} U' ds_1 \\ &\quad - \frac{1}{v_1^2} \frac{dv_1}{dt} ds + \frac{1}{v_1} \frac{dx_1}{dt} ds_1 + \frac{1}{\rho v_1} \frac{d\rho}{dt} ds + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} ds. \end{aligned} \right.$$

Pour avoir une seconde équation, considérons un élément ns de binormale à la trajectoire. Nous pouvons choisir le point s de telle manière que la pression en ce point soit la même qu'au point m . Soit $ns = ds_2$. La première des équations générales du mouvement des fluides transformées nous donne

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} ds = U ds - \frac{dv_1}{dt} ds - v_1 \frac{dv_1}{ds} ds$$

et la troisième

$$(2) \quad - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds''} ds_2 = - U'' ds_2 - v_1 \frac{dx_2}{dt} ds_2.$$

Remarquons que la variation de pression de m en n est la même que celle de s en n , puisque m et s ont la même pression; donc, dans les équations (1) et (2) les premiers membres sont égaux et l'on a

$$(3) \quad \frac{1}{v_1} \frac{dv_1}{ds} ds = \frac{1}{v_1^2} U ds + \frac{1}{v_1^2} U'' ds_2 + \frac{1}{v_1} \frac{dx_2}{dt} ds_2 - \frac{1}{v_1^2} \frac{dv_1}{dt} ds.$$

L'équation de continuité nous donne

$$(4) \quad \frac{1}{v_1} \frac{dv_1}{ds} ds = \frac{\partial x}{\partial s'} ds + \frac{\partial' x}{\partial s''} ds - \frac{1}{\rho v_1} \frac{d\rho}{dt} ds - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} ds.$$

Les deux premiers membres de (3) et (4) étant égaux, on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s'} ds + \frac{\partial' x}{\partial s''} ds &= \frac{1}{v_1^2} U ds + \frac{1}{v_1^2} U'' ds_2 + \frac{1}{v_1} \frac{dx_2}{dt} ds_2 \\ &\quad - \frac{1}{v_1^2} \frac{dv_1}{dt} ds + \frac{1}{\rho v_1} \frac{d\rho}{dt} ds + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} ds; \end{aligned}$$

∂x et $\partial' x$ ont les mêmes valeurs que précédemment et il vient, en substituant,

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{dx}{ds} \frac{ds}{ds_1} ds + \frac{1}{v_1^2} U ds + \frac{1}{v_1^2} U'' ds_2 + \frac{1}{v_1} \frac{dx_2}{dt} ds_2 \\ &\quad - \frac{1}{v_1^2} \frac{dv_1}{dt} ds + \frac{1}{\rho v_1} \frac{d\rho}{dt} ds + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} ds. \end{aligned} \right.$$

Les équations (7) et (8) constituent un système d'équations complètement générales.

Remarquons que si nous nous limitons au cas du mouvement permanent, tout en considérant les forces extérieures, et si nous supposons que le plan auquel se rapportent les équations (7) et (8) se meuve le long de la trajectoire en restant toujours osculateur, nous pouvons obtenir, par une transformation de coordonnées rectangulaires, les équations de la trajectoire par rapport à des axes fixes.

M. D'OCAGNE fait la Communication suivante :

Sur une transformation birationnelle réciproque de l'espace.

La transformation envisagée est celle dans laquelle deux points se correspondent lorsqu'ils sont diamétralement opposés dans une sphère passant par un cercle fixe Γ donné à distance finie dans l'espace.

Cette transformation, à laquelle j'ai déjà consacré une Note (*Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liège*; 1889), peut se ramener homographiquement à l'inversion en faisant correspondre le cercle Γ au cercle isotrope.

La transformée d'un plan quelconque P est, en effet, une quadrique Q passant par le cercle Γ et par le point situé à l'infini dans la direction normale au plan de ce cercle. Cette quadrique Q est d'ailleurs coupée par le plan P suivant un cercle, et la sphère admettant ce cercle pour section diamétrale passe aussi par le cercle Γ .

D'une manière plus générale, une quadrique Q passant par le cercle Γ a pour transformée une quadrique Q' passant également par ce cercle. En outre, les quadriques Q et Q' se rencontrent suivant un second cercle et la sphère admettant ce cercle pour section diamétrale contient aussi le cercle Γ .

Soient M et M' deux points correspondants, auxquels on fait décrire deux surfaces S et S', ou deux courbes C et C', transformées l'une de l'autre. On a ces théorèmes :

Les parallèles aux normales en M et en M' aux surfaces S et S', respectivement menées par M' et par M, se coupent dans le plan du cercle Γ .

Les plans parallèles aux plans normaux en M' et en M aux courbes C et C', respectivement menés par M et par M', se coupent dans le plan du cercle Γ .

Ce second théorème est d'ailleurs un corollaire immédiat du premier.

M. d'OCAGNE fait la Communication suivante :

Sur la représentation des équations du second ordre par des droites et par des cercles.

L'équation du second ordre à trois variables la plus générale étant écrite

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2b_1 x_2 x_3 + 2b_2 x_3 x_1 + 2b_3 x_1 x_2 + 2c_1 x_1 + 2c_2 x_2 + 2c_3 x_3 + d = 0,$$

j'ai fait voir ⁽¹⁾ que la condition nécessaire et suffisante pour que cette équation soit représentable par deux systèmes de droites parallèles et par un système de cercles est que l'une

(1) Bull. de la Soc. math., t. XXIV, p. 81.

des quantités $a_2a_3 - b_1^2$, $a_3a_1 - b_2^2$, $a_1a_2 - b_3^2$ soit positive.

J'ai fait observer depuis lors ⁽¹⁾ que ce résultat pouvait être complété ainsi : *La condition énoncée est nécessaire et suffisante pour que l'équation soit représentable par deux faisceaux de droites et un système de cercles, et chacun de ces faisceaux est NÉCESSAIREMENT formé de droites parallèles.*

M. APPELL adresse la Note suivante :

Sur un mode d'inversion des intégrales multiples ⁽¹⁾.

Soient $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, ..., $F_n(x, y)$, n fonctions de deux variables indépendantes x et y . Soit, d'autre part, un domaine d'intégration D dont la définition dépend d'une façon uniforme de n variables indépendantes $a_1, a_2, \dots, a_n$. Les équations

$$\iint F_1(x, y) dx dy = u_1,$$

$$\iint F_2(x, y) dx dy = u_2,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$\iint F_n(x, y) dx dy = u_n,$$

où les intégrales sont étendues au domaine D , définissent $a_1, a_2, \dots, a_n$, comme fonctions de $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Plus généralement, on peut considérer plusieurs domaines d'intégration dépendant des variables $a_1, a_2, \dots, a_n$ et définir $a_1, a_2, \dots, a_n$ comme fonctions de $u_1, u_2, \dots, u_n$ par des équations de même forme contenant plusieurs intégrales doubles dans les premiers membres.

L'étude des fonctions ainsi définies conduit à des problèmes analogues à ceux qui se présentent dans la théorie des intégrales simples (théorème d'Abel : Uniformité des fonctions inverses). Nous en donnerons des exemples élémentaires dans une Note qui sera publiée dans l'*American Journal*.

⁽¹⁾ *Bull. de la Soc. phys.-math. de Kasan*, 2^e série, t. VI.

⁽²⁾ Annexe au procès-verbal de la séance du 20 janvier. (Note reçue le 27 janvier.)

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR L'ÉQUATION DE LA PROPAGATION DE LA CHALEUR;

Par M. A. BOULANGER.

Considérons l'équation qui régit la propagation de la chaleur dans un corps, sous la forme

$$(1) \quad \delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial u}{\partial x_4} = 0.$$

Proposons-nous de trouver tous les systèmes de quatre fonctions X_m ($m = 1, 2, 3, 4$) des variables x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) et d'une fonction F de U et des variables x_i , telles que si l'on remplace les quantités X_m en fonction des variables x_i dans une solution quelconque $U(X_1, X_2, X_3, X_4)$ de l'équation

$$(2) \quad \delta' U = \frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial X_3^2} - \frac{\partial U}{\partial X_4} = 0,$$

la fonction $u(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv F(U, x_1, x_2, x_3, x_4)$, ainsi obtenue, vérifie l'équation (1) (1).

A cet effet, calculons le premier membre δu de l'équation (1) à l'aide de l'égalité $u(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv F(U, x_1, x_2, x_3, x_4)$. On a évidemment

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial U^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial U \partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \sum_{m=1}^{m=4} \frac{\partial U}{\partial X_m} \frac{\partial X_m}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = \sum_{m=1}^{m=4} \frac{\partial^2 U}{\partial X_m^2} \left(\frac{\partial X_m}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{m,n=1}^{m,n=4} \frac{\partial^2 U}{\partial X_m \partial X_n} \frac{\partial X_m}{\partial x_i} \frac{\partial X_n}{\partial x_i} + \sum_{m=1}^{m=4} \frac{\partial U}{\partial X_m} \frac{\partial^2 X_m}{\partial x_i^2}$$

($i = 1, 2, 3, 4$).

(1) M. Painlevé s'est posé cette question pour l'équation de Laplace $\Delta V = 0$, dans un Mémoire sur la Transformation des fonctions $V(x, y, z)$ qui satisfont

Posons maintenant

$$\left. \begin{aligned} h_m^2 &= \sum_{i=1}^{i=3} \left(\frac{\partial X_m}{\partial x_i} \right)^2 \\ k_{m,n} &= \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial X_m}{\partial x_i} \frac{\partial X_n}{\partial x_i} \end{aligned} \right\} \quad (m, n = 1, 2, 3, 4).$$

Nous aurons de suite

$$\begin{aligned} \delta u &= \frac{\partial F}{\partial U} \left[\sum_{m=1}^{m=4} \left(h_m^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X_m^2} + \frac{\partial U}{\partial X_m} \delta X_m \right) + \sum_{m,n=1}^{m,n=4} k_{mn} \frac{\partial^2 U}{\partial X_m \partial X_n} \right] \\ &+ \frac{\partial^2 F}{\partial U^2} \left[\sum_{m=1}^{m=4} h_m^2 \left(\frac{\partial U}{\partial X_m} \right)^2 + \sum_{m,n=1}^{m,n=4} k_{m,n} \frac{\partial U}{\partial X_m} \frac{\partial U}{\partial X_n} \right] \\ &- 2 \sum_{m=1}^{m=4} \frac{\partial U}{\partial X_m} \left[\sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial^2 F}{\partial U \partial x_i} \frac{\partial X_m}{\partial x_i} \right] + \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} - \frac{\partial F}{\partial x_4} \equiv \Phi. \end{aligned}$$

Il faut que cette quantité Φ s'annule identiquement si U est une solution de $\delta'U = 0$. Si donc on remplace dans Φ les x_i en fonction des X_i , on doit avoir identiquement

$$\Phi \equiv S \delta'U,$$

et, comme Φ gardera la même forme si l'on y conserve les variables x_i , il faut que l'expression ci-dessus de Φ soit de la forme $S \delta'U$. Cette condition nécessaire remplie, $\delta u = 0$ entraînera $\delta'U = 0$, et réciproquement.

Les conditions d'identification sont

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & h_1^2 = h_2^2 = h_3^2, \\ \text{(II)} \quad & h_4^2 = 0, \\ \text{(III)} \quad & k_{m,n} = 0 \quad (m, n = 1, 2, 3, 4), \\ & \frac{\partial^2 F}{\partial U^2} = 0. \end{aligned}$$

Cette condition montre que F est une fonction linéaire de U ,

$$F = AU + B,$$

à l'équation $\Delta V = 0$ (*Travaux des Facultés de Lille*, Mémoire n° 1, 1889). M. Lacour, dans sa seconde Thèse, a traité un problème moins général pour l'équation de la propagation de la chaleur dans un plan; sa solution serait fort abrégée par le mode d'exposition indiqué ici.

A et B étant des fonctions des x_i . Les conditions suivantes s'écrivent alors

$$(IV) \quad \frac{1}{2} A \delta X_m + \sum_{n=1}^{n=3} \frac{\partial A}{\partial x_n} \frac{\partial X_m}{\partial x_n} = 0 \quad (m = 1, 2, 3).$$

$$(V) \quad \frac{1}{2} A (\delta X_4 + h_1^2) + \sum_{n=1}^{n=3} \frac{\partial A}{\partial x_n} \frac{\partial X_4}{\partial x_n} = 0, \\ \delta A = 0, \quad \delta B = 0.$$

On peut supposer B identiquement nul; en effet, si $AU + B$ répond au problème, AU y satisfait aussi.

Si l'on se limite au cas des fonctions réelles, la condition (II) montre que X_4 ne dépend que de x_4 , en sorte que la condition (V) se réduit à

$$h_1^2 = \frac{\partial X_4}{\partial x_4},$$

et les conditions (III), où figure l'indice 4, sont identiquement vérifiées.

Considérons x_4 comme un paramètre; les conditions (I) et les conditions (III) restantes sont celles qui définissent la représentation conforme de l'espace avec proportionnalité des éléments linéaires, le coefficient de proportionnalité étant $H = \pm \sqrt{\frac{\partial X_4}{\partial x_4}}$. Les figures étant alors semblables peuvent être amenées à coïncider par un déplacement suivi d'une homothétie de rapport H. On a donc

$$X_m = p_m + H \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_{mi} x_i \quad (m = 1, 2, 3),$$

les coefficients α_{mi} étant les cosinus directeurs de trois directions rectangulaires et dépendant, ainsi que les coefficients p_m , du paramètre x_4 .

Les conditions (IV) se réduisent évidemment à

$$\frac{\partial}{\partial X_m} (2 H^2 \text{Log } A) = \frac{\partial X_m}{\partial x_4} = p'_m + \sum_{i=1}^{i=3} (H \alpha_{mi})' x_i,$$

les accents désignant des dérivations par rapport à x_4 . En rem-

plaçant les x_i en fonction des X_i dans le second membre, il vient

$$(IVbis) \left\{ \frac{\partial}{\partial X_m} (2 H^2 \text{Log } A) = \frac{H'}{H} (X_m - p_m) + \sum_{i=1}^{i=3} \left[\alpha'_{mi} \sum_{n=1}^{n=3} \alpha_{ni} (X_n - p_n) \right] + p'_m \right. \\ \left. (m = 1, 2, 3). \right.$$

Je dis que les coefficients α sont constants. En effet, si l'on exprime que l'on a

$$\frac{\partial^2}{\partial X_m \partial X_n} (2 H^2 \text{Log } A) = \frac{\partial^2}{\partial X_n \partial X_m} (2 H^2 \text{Log } A),$$

il vient

$$\sum_{i=1}^{i=3} (\alpha'_{mi} \alpha_{ni} - \alpha_{mi} \alpha'_{ni}) = 0;$$

or la condition de perpendicularité des directions (α_n) et (α_m) donne

$$\sum_{i=1}^{i=3} (\alpha'_{mi} \alpha_{ni} + \alpha_{mi} \alpha'_{ni}) = 0.$$

Donc

$$\sum \alpha'_{mi} \alpha_{ni} = 0 \quad (m \neq n);$$

d'ailleurs

$$\sum \alpha'_{mi} \alpha_{mi} = 0.$$

On a ainsi trois équations linéaires et homogènes en α'_{mi} ($i = 1, 2, 3$) ayant pour déterminant 1. Donc $\alpha'_{mi} = 0$. c. q. f. d.

Cela posé, on a, d'après les relations (IV bis) simplifiées par le résultat précédent :

$$2 H^2 \text{Log } A = \frac{H'}{H} \sum_{m=1}^{m=3} (X_m - p_m)^2 + 2 \sum_{m=1}^{m=3} p'_m X_m + \Psi(x_i),$$

ou, en revenant aux variables x_i ,

$$\mu = \text{Log } A = \frac{H'}{4H} \sum_{i=1}^{i=3} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{i=3} \left(x_i \sum_{m=1}^{m=3} \frac{p'_m \alpha_{mi}}{H} \right) + G(x_i).$$

Il reste à satisfaire identiquement à la dernière condition

$$\partial A = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{i=3} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_i^2} \right] = \frac{\partial \mu}{\partial x_i}.$$

En annulant le coefficient de Σx_i^2 dans le résultat de la substitution, il vient

$$\left(\frac{H'}{H}\right)' - \left(\frac{H'}{H}\right)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad H = \frac{k}{x_i + c}.$$

En annulant le coefficient de x_i , on a

$$\left(\sum_m \frac{p'_m x_{mi}}{H}\right)' - \frac{H' \sum_m p_m x_{mi}}{H^2} = 0,$$

ou

$$\sum_{m=1}^{m=3} \frac{p'_m x_{mi}}{H} = \frac{\alpha_i H}{k}.$$

Les quantités k , c , α_i sont des constantes d'intégration. On déduit de là

$$p'_m = \frac{H^2}{k} \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_i x_{mi},$$

ou

$$p_m = -\frac{k}{x_i + c} \sum x_{mi} \alpha_i + \text{const.}$$

Enfin, il reste

$$\frac{H'}{H} + \frac{H^2}{k^2} \sum \alpha_i^2 - G'(x_i) = 0,$$

d'où

$$G(x_i) = \text{Log } H - \frac{\Sigma \alpha_i^2}{4(x_i + c)} + \text{const.}$$

Réunissant les résultats obtenus, il vient

$$F = \frac{C}{x_i + c} e^{-\frac{\Sigma (x_i - a_i)^2}{4(n_i + c)}} U(X_1, X_2, X_3, X_4),$$

$$X_m = \frac{k}{x_i + c} \sum_{i=1}^{i=3} x_{mi} (x_i - a_i) + \text{const.} \quad (m = 1, 2, 3),$$

$$X_4 = -\frac{k^2}{x_i + c}.$$

On reconnaît une extension des formules données par M. Lacour.

DES GROUPES PRIMITIFS DE CLASSE $N-1$ ET DE DEGRÉ N ;

Par M. ED. MAILLET.

1.

Dans notre Thèse de Doctorat (p. 49-68) nous avons établi le théorème suivant :

THÉOREME. — *Les seuls groupes primitifs de classe $N-1$ et de degré $N \leq 101$ sont ceux de degré $N = p^m$ (p étant premier) et sont linéaires à indices réels.*

Pour y arriver, nous avons établi un certain nombre de conditions auxquelles doit satisfaire N pour un groupe primitif G de degré N et de classe $N-1$. Ainsi, on ne peut avoir N égal à $4h+2$, à pp_1 , p^2p_1 , $p^2p_1^2$, $p_1p_2p_3$, p_1p^3 , les nombres premiers p, p_1, p_2, p_3 étant différents.

De même, soit $(^1)$ H le sous-groupe des substitutions de G qui laissent une même lettre de G immobile : on a $G = N\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ divisant $N-1$, $N = n\mathcal{H} + 1$, et G ne peut être primitif, si $\mathcal{H}$ est égal à 2 ou 3, ou si $n < 11$, que quand $N = p^m$. Ainsi, si $N-1$ est égal à q , $2q$ ou $3q$, q étant premier impair, G ne peut être primitif que si $N = 2^m$.

Enfin, les $N-1$ substitutions de G , qui sont de classe N , ne peuvent former avec l'unité un groupe de degré et d'ordre N que si ce groupe est régulier, $N = p^m$, et G linéaire à indices réels.

En nous appuyant sur ce qui précède, et aussi principalement sur ce lemme :

LEMME. — *Si p^2 est la plus haute puissance du nombre premier p qui divise l'ordre G d'un groupe quelconque G , on sait que $(^2)$*

$$G = p^{2\gamma}(1 + hp),$$

où $1 + hp$ est le nombre des groupes d'ordre p^2 contenu dans G .

(¹) Les ordres des groupes $A, B, \dots, G, H, \dots$ seront désignés par $A, B, \dots, G, \mathcal{H}, \dots$; de même $(S), (T), \dots$ seront les groupes des puissances de la substitution $S, T, \dots$.

(²) SYLOW *Math. Ann.*, t. V.

Alors G contient au moins $\frac{p}{p^2-1} (p^2-1)$ substitutions d'ordre $\equiv 0 \pmod{p}$;

et sur les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — Un groupe primitif G de degré $N = \varphi p$ (p premier impair, $\varphi > 1$ et premier à p) et de classe $N-1$ ne peut exister si $\varphi < p+1$;

THÉORÈME II. — Un groupe primitif G de degré $N = \varphi p^2$ (p premier impair, $\varphi > 1$ et premier à p) et de classe $N-1$ ne peut exister si $\varphi < p^2+1$;

THÉORÈME III. — Un groupe primitif G de degré $N = \varphi p^m$ (p premier impair, $\varphi > 1$ et premier à p) et de classe $N-1$ ne peut exister que si $\varphi > \frac{p+1}{2}$;

nous concluons (théorème IV) que le théorème énoncé au début a lieu pour toutes les valeurs de $N \leq 201$.

II.

LEMME 1. — Soit $\mathcal{L}'$ l'ordre d'un groupe L' de substitutions tel que $\mathcal{L}' \equiv 0 \pmod{p}$ et $\not\equiv 0 \pmod{p^2}$, p étant premier. On sait que $\mathcal{L}' = p\gamma_1(1+hp)$, où $1+hp$ est le nombre des groupes d'ordre p contenus dans L' : L' contient au moins $1+hp$ substitutions d'ordre premier à p (γ compris l'unité).

En effet, $p\gamma_1$ est l'ordre du groupe des substitutions de L' permutables au sous-groupe (T') des puissances d'une substitution T' d'ordre p de L' ; si donc il y a, dans L' , θ substitutions $\not\equiv 1$ échangeables à T' , ces substitutions sont permutables à (T') , en sorte que $\theta \leq p\gamma_1 - 1$. Le nombre des substitutions T'' différentes de 1 de L' telles qu'on puisse trouver une substitution d'ordre p de L' échangeable à T'' est donc au plus égal à $(1+hp)(p\gamma_1-1)$, puisque $1+hp$ est le nombre des sous-groupes d'ordre p de L' . Or, toute substitution U_1 de L' d'ordre kp multiple de p (k premier à p) est de la forme UV (*), où U est d'ordre k , V d'ordre p

(*) En effet, on peut trouver φ et ψ premiers à kp et tels que $k\varphi + p\psi = 1$.

et U et V sont échangeables. Dès lors, UV étant échangeable à V , c'est-à-dire à une substitution d'ordre p , le nombre des substitutions de la forme UV , c'est-à-dire d'ordre $\equiv 0 \pmod{p}$, est au plus égal à $(p\nu_1 - 1)(1 + hp)$. Il en résulte de suite que le nombre des substitutions de L' (y compris la substitution 1) d'ordre $\not\equiv 0 \pmod{p}$ est au moins égal à

$$(1 + hp)p\nu_1 - (1 + hp)(p\nu_1 - 1) = 1 + hp.$$

En remarquant que le nombre des substitutions échangeables à (T') et d'ordre $\equiv 0 \pmod{p}$ est $\leq (p - 1)\nu_1$, on voit même que L' renferme au moins $(1 + hp)\nu_1$ substitutions d'ordre premier à p .

THÉORÈME I. — *Un groupe primitif G de degré $N = \wp p$ (p premier impair, $\wp > 1$ et premier à p) et de classe $N - 1$ ne peut exister que si $\wp < p + 1$.*

En effet, l'ordre $G = N\mathfrak{H}$ de G divise $N(N - 1)$, l'ordre $\mathfrak{H}$ du groupe H des substitutions de G laissant une lettre donnée de G immobile divisant $N - 1$, en sorte que G est $\equiv 0 \pmod{p}$ et $\not\equiv 0 \pmod{p^2}$. D'après un théorème de MM. Mathieu⁽¹⁾ et Sylow⁽²⁾,

$$G = p\nu(hp + 1),$$

où $hp + 1$ est le nombre des sous-groupes distincts d'ordre p de G . On ne peut avoir $h = 0$, sans quoi G contiendrait un sous-groupe invariant d'ordre $p \not\equiv 0 \pmod{N}$, ce qui est impossible, puisque G est primitif : donc $h \geq 1$. G contient $hp + 1 \geq p + 1$ sous-groupes distincts d'ordre p , par suite

$$(hp + 1)(p - 1) \geq (p + 1)(p - 1) = p^2 - 1$$

substitutions d'ordre p , puisque deux sous-groupes distincts d'ordre p de G n'ont deux à deux d'autre substitution commune que l'unité. Ces substitutions sont d'ailleurs de classe $N = \wp p$, et puisque G renferme exactement $N - 1$ substitutions de classe N ,

puisque h et p sont premiers entre eux, et l'on a $U_1^{hp} \cdot U_1^{p-1} = U_1$, et il suffit de prendre $U = U_1^{p-1}$, $V = U_1^{hp}$.

(1) *J. de Math.*, 1861.

(2) SYLOW, *loc. citat.*

dont quelques-unes d'ordre diviseur de φ , il faut

$$N-1 = \varphi p - 1 > (hp+1)(p-1) \geq p^2 - 1,$$

et $\varphi > p$ ⁽¹⁾.

C. Q. F. D.

Remarque. — Cette limite inférieure peut être améliorée dans une foule de cas : en effet, $hp+1$ doit diviser $\varphi(\varphi p - 1)$, et est au moins égal au plus petit diviseur de $\varphi(\varphi p - 1)$ qui soit $\equiv 1 \pmod{p}$. On en conclut :

THÉORÈME I bis. — *Soit G un groupe primitif de degré $N = \varphi p$ (p premier impair, $\varphi > 1$ et premier à p) et de classe $N-1$; si $lp+1$ est le plus petit diviseur de G , et a fortiori de $\varphi(\varphi p - 1)$ qui soit $\equiv 1 \pmod{p}$, on a : $\varphi > l(p-1)+1$.*

Supposons que $r = \lambda p + 1$ divise $\varphi(\varphi p - 1)$, d'où

$$\varphi^2 \frac{r-1}{\lambda} - \varphi \equiv 0 \pmod{r} \quad \text{et} \quad -\varphi^2 - \lambda\varphi = -\varphi(\varphi + \lambda) \equiv 0 \pmod{r},$$

en sorte que r divise $\varphi(\varphi + \lambda)$. On en conclut :

COROLLAIRE I. — *Si le nombre $ip+1$ ne divise pas le nombre $\varphi(\varphi+i)$, pour une au moins des valeurs de i égales à $1, 2, \dots, \lambda$, on en conclut que $l \geq \lambda+1$, d'où*

$$\varphi > (\lambda+1)(p-1)+1.$$

En particulier quand $\lambda=1$, il faut $\varphi > 2p-1$, et, puisque φ est premier à p , $\varphi \geq 2p+1$; d'où :

COROLLAIRE II. — *Si $\varphi(\varphi+1)$ n'est pas divisible par $p+1$, on a $\varphi \geq 2p+1$.*

COROLLAIRE III. — *Soit q un nombre premier impair, et $p = kq-1$; si φ n'est pas de la forme $k'q$ ou $k'q-1$, on a*

$$\varphi \geq 2p+1.$$

Car $\varphi(\varphi+1) \not\equiv 0 \pmod{q}$, et $p+1 \equiv 0 \pmod{q}$, en sorte que $p+1$ ne divise pas $\varphi(\varphi+1)$.

(1) Les limites inférieures trouvées ici sont plus avantageuses que celles indiquées dans notre Thèse de Doctorat, p. 67.

COROLLAIRE IV. — Si p est de la forme $15k + 2$, et ρ d'une des deux formes $15k' + 1$ ou $15k' + 7$, on a $\rho \geq 3p - 1$.

Car $p + 1 \equiv 0 \pmod{3}$, en sorte que $p + 1$ ne divise pas $\rho(\rho + 1)$, et $2p + 1 \equiv 0 \pmod{5}$, en sorte que $2p + 1$ ne divise pas $\rho(\rho + 2)$.

Et ainsi de suite.

LEMME II. — Soit p^2 la plus haute puissance du nombre premier p qui divise l'ordre $\mathfrak{G}$ d'un groupe quelconque G ; on sait que

$$\mathfrak{G} = p^{2\nu}(1 + np),$$

où $p^{2\nu}$ est l'ordre du groupe des substitutions de G permutable à un sous-groupe H d'ordre p^2 de G . Alors G contient au moins $\frac{\mathfrak{G}}{p^{2\nu}}(p^2 - 1)$ substitutions d'ordre $\equiv 0 \pmod{p}$.

En effet, on sait⁽¹⁾ que les sous-groupes d'ordre p^2 de G sont les transformés d'un quelconque d'entre eux par les substitutions de G , en nombre $1 + np$, et que ⁽²⁾ $1 + np = 1 + n_1p + n_2p^2$, où n_1p est le nombre des transformés de H ayant en commun avec H une substitution d'ordre p , n_2p^2 le nombre des transformés de H n'ayant en commun avec H d'autre substitution que l'unité. De plus les substitutions de H sont échangeables.

Soit S une substitution de H d'ordre p ; elle est échangeable à toutes les substitutions de H , et à toutes celles des transformés de H par G dont elle fait partie; le groupe L des substitutions échangeables à S contient H et ces transformés. Si

$$\mathfrak{L} = p^{2\nu'}(1 + hp),$$

$p^{2\nu'}$ étant l'ordre du sous-groupe des substitutions de L permutable à H , et $1 + hp$ le nombre des sous-groupes d'ordre p^2 de L , lesquels sont les transformés de H par L , chacun de ces transformés contient S , puisque toute substitution g de L est échangeable à S et que $g^{-1}Hg$ contient dès lors S . On a $h \leq n_1$.

(1) SYLOW, *loc. citat.*

(2) Voir notre Mémoire des *Ann. Fac. Sc. de Toulouse*, 1895, D, 7, et 1896, A, 17.

formant la première ligne de (4). Parmi ces p substitutions on en a une $(S^l \tau_k)^{\psi_k} = S^{u_k + l\psi_k} = 1$, à savoir celle pour laquelle l est tel que $u_k + l\psi_k \equiv 0 \pmod{p}$. Son ordre ψ_k , le même que celui de τ_k , est premier à p ; les $p - 1$ autres ont pour ordre $p\psi_k$, en sorte que, dans chaque ligne de (4), il y a une et une seule substitution d'ordre premier à p : nous pourrions évidemment supposer que ce soit celle de la première colonne, puisque nous avons seulement supposé que $\tau_i (i = 1, 2, \dots, \lambda)$ était une des substitutions de L correspondant à τ_i dans L' , sans rien spécifier de plus. Les substitutions de la $k^{\text{ième}}$ ligne, sauf $\tau_k (k = 1, 2, \dots, \lambda)$, étant d'ordre p ou $p\psi_k$, sont toutes d'ordre $\not\equiv 0 \pmod{p^2}$ et $\equiv 0 \pmod{p}$. Nous pourrions faire correspondre au sous-groupe (S) de G le Tableau Θ formé des $(p - 1)\lambda$ substitutions des $p - 1$ dernières colonnes de (4).

Si alors S_1 est une substitution d'ordre p de G non contenue dans (S) , L_1 le groupe correspondant analogue à L , formé des substitutions de G échangeables à S_1 , on a

$$(5) \quad \mathcal{L}_1 = (1 + h_1 p) p^2 \nu'_1,$$

$1 + h_1 p$ étant le nombre des groupes d'ordre p^2 contenus dans L_1 ; et l'on voit de même que L_1 contient les $p\lambda_1$ substitutions distinctes

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} \tau'_1 = 1, & S_1, & S_1^2, & \dots & S_1^{p-1}, \\ \tau'_2, & S_1 \tau'_2, & S_1^2 \tau'_2, & \dots & S_1^{p-1} \tau'_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau'_{\lambda_1}, & S_1 \tau'_{\lambda_1}, & S_1^2 \tau'_{\lambda_1}, & \dots & S_1^{p-1} \tau'_{\lambda_1}, \end{array} \right.$$

qui sont d'ordre $\equiv 0 \pmod{p}$, et $\not\equiv 0 \pmod{p^2}$, sauf celles de la première ligne qui sont d'ordre premier à p . On a

$$\lambda_1 \geq 1 + h_1 p.$$

d'après le lemme I, et l'on peut faire correspondre au sous-groupe (S_1) de G le Tableau Θ_1 formé des $(p - 1)\lambda_1$ substitutions des $p - 1$ dernières colonnes de (6). Les substitutions de Θ_1 diffèrent d'ailleurs de celles de Θ , car si

$$S^j \tau_k = S^{j'} \tau'_k \quad [j \text{ et } j' \not\equiv 0 \pmod{p}],$$

et si ψ_k, ψ'_k sont les ordres respectifs, premiers à p , de τ_k, τ'_k , on

aura

$$(S^j \sigma_k) \psi_k = (S_1^j \sigma'_k) \psi_k = S^j \psi_k = S_1^j \psi_k \sigma'_k \psi_k.$$

Or $S^j \psi_k$ est d'ordre p : donc $\sigma'_k \psi_k^p = 1$, en sorte que ψ'_k divise $p \psi_k$, par suite ψ_k ; de même ψ_k divise

$$\psi'_k, \quad \text{et} \quad \psi_k = \psi'_k,$$

d'où

$$S^j \psi_k = S_1^j \psi_k,$$

ce qui est impossible, puisque $(S) \neq (S_1)$.

On peut continuer de la sorte : à chaque groupe (S_q) des puissances d'une substitution S_q d'ordre p de G nous ferons correspondre un Tableau ou ensemble Θ_q de substitutions analogue à Θ et Θ_1 , et tel que les ensembles

$$(7) \quad \Theta, \quad \Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \dots, \quad \Theta_q, \quad \dots$$

correspondant à

$$(8) \quad (S), \quad (S_1), \quad (S_2), \quad \dots, \quad (S_q), \quad \dots$$

respectivement, n'aient deux à deux aucune substitution commune, et contiennent respectivement au moins

$$(9) \quad (1 + hp)(p - 1), \quad (1 + h_1 p)(p - 1), \quad \dots, \quad (1 + h_q p)(p - 1), \quad \dots$$

substitutions autres que l'unité, distinctes de celles des autres ensembles, et toutes d'ordre $\equiv 0 \pmod{p}$ et $\not\equiv 0 \pmod{p^2}$, $1 + h_q p$ étant le nombre des transformés de H par les substitutions de G qui ont en commun (S_q) .

Quand on aura $h = 0$, au groupe (S) d'ordre $\neq 1$, nous ferons correspondre l'ensemble Θ des $p - 1$ substitutions de S d'ordre $\equiv 0 \pmod{p}$.

Enfin, si T est une substitution de G d'ordre p^2 , elle ne peut être commune à deux groupes distincts d'ordre p^2 : aux $p(p - 1)$ substitutions de (T) d'ordre p^2 , on fera correspondre l'ensemble Θ' de ces mêmes substitutions.

Les substitutions des ensembles Θ, Θ, Θ' sont évidemment distinctes.

Ceci posé, considérons l'ensemble Λ obtenu en écrivant successivement les substitutions $\neq 1$ des divers transformés $H, H_1, H_2, \dots$

de H par les substitutions de G; l'ensemble B formé de celles de ces substitutions qui sont distinctes; l'ensemble C des ensembles Θ , θ , Θ' obtenus précédemment.

D'après ce qui précède, A contient

$$(1 + n_1 p + n_2 p^2)(p^2 - 1) = \frac{G}{p^{2, \gamma}} (p^2 - 1)$$

substitutions : une substitution S d'ordre p et ses puissances y sont répétées chacune $1 + hp$ fois, $1 + hp$ ayant même signification que précédemment; A contient ainsi exactement $(1 + hp)(p - 1)$ substitutions appartenant à (S) et $\neq 1$. A ces substitutions correspondent dans B les $p - 1$ substitutions de (S) $\neq 1$, et dans C les $\lambda(p - 1) \geq (1 + hp)(p - 1)$ substitutions distinctes d'ordre $\equiv 0 \pmod{p}$, et $\not\equiv 0 \pmod{p^2}$, de l'ensemble Θ . Aux substitutions de A appartenant à (S_i) , S_i étant d'ordre p et non contenu dans (S), correspondent de même dans C les $\lambda_i(p - 1) \geq (1 + h_i p)(p - 1)$ substitutions d'ordre $\equiv 0 \pmod{p}$ et $\not\equiv 0 \pmod{p^2}$ de l'ensemble Θ_i ; et ainsi de suite.

De même pour les substitutions S d'ordre p pour lesquelles $h = 0$: aux $p - 1$ substitutions de (S) dans A correspondent dans B et C les $p - 1$ substitutions de l'ensemble θ .

Finalement, si Φ est le nombre des substitutions de A qui sont d'ordre p , à l'ensemble de ces Φ substitutions correspond dans C un ensemble de $\Lambda \geq \Phi$ substitutions distinctes d'ordre $\equiv 0 \pmod{p}$ et $\not\equiv 0 \pmod{p^2}$.

D'autre part, d'après ce qui précède, une substitution d'ordre p^2 figurera une fois et une seule dans A et C; si Ψ est le nombre des substitutions de G d'ordre p^2 , c'est aussi le nombre des substitutions distinctes de C d'ordre p^2 .

La considération de A donnant $\Phi + \Psi = \frac{G}{p^{2, \gamma}} (p^2 - 1)$, on voit que C, par suite G, contient

$$\Lambda + \Psi \geq \frac{G}{p^{2, \gamma}} (p^2 - 1)$$

substitutions distinctes d'ordre $\equiv 0 \pmod{p}$. c. q. f. d.

Remarque. — Ce lemme n'est qu'une extension de cette pro-

priété due à Mathieu ⁽¹⁾ que si G est d'ordre $\equiv 0 \pmod{p}$ et $\not\equiv 0 \pmod{p^2}$, p étant premier, on a

$$G = p^\nu (1 + np),$$

où $1 + np$ est le nombre des sous-groupes de G d'ordre p , et G contient au moins $(1 + np)(p - 1) = \frac{G}{p^\nu}(p - 1)$ substitutions d'ordre $\equiv 0 \pmod{p}$.

COROLLAIRE. — Dans un groupe G de degré p^2 transitif, et d'ordre $\not\equiv 0 \pmod{p^3}$, mais $> p^2$, on a $\nu > 1$.

En effet, si $\nu = 1$, et si H est l'ordre du groupe H des substitutions de G laissant une lettre donnée de G immobile, G contient $\frac{G}{p^2}(p^2 - 1) = \mathcal{H}(p^2 - 1)$ substitutions d'ordre $\equiv 0 \pmod{p}$, c'est-à-dire de classe p^2 , et seulement $\mathcal{H}$ autres substitutions, ce qui est absurde, puisque G est transitif et contient toujours, en dehors des $\mathcal{H}$ substitutions de H d'ordre premier à p , quelques substitutions laissant une lettre de G immobile, par suite d'ordre premier à p , et n'appartenant pas à H .

THÉORÈME II. — Un groupe primitif G de degré $N = \wp p^2$ (p premier impair, $\wp$ premier à p et > 1) ne peut exister si $\wp < p^2 + 1$.

La démonstration est analogue à celle du théorème I. L'ordre $G = N\mathcal{H}$ de G divise $N(N - 1)$, l'ordre $\mathcal{H}$ du groupe H des substitutions de G laissant une lettre donnée immobile divisant $N - 1$, en sorte que G est $\equiv 0 \pmod{p^2}$ et $\not\equiv 0 \pmod{p^3}$. On a

$$G = p^{2\nu}(1 + n_1p + n_2p^2).$$

On ne peut avoir $n_2 = 0$, sans quoi ⁽²⁾ G contiendrait un sous-groupe invariant d'ordre p^6 ($\mathfrak{h} = 1$ ou 2), et ne serait pas primitif. D'après le lemme précédent G contient au moins

$$(1 + n_1p + n_2p^2)(p^2 - 1)$$

⁽¹⁾ *J. de Liouville*, 1861.

⁽²⁾ *Ann. Fac. Sc. de Toulouse*, 1896, A. 17.

substitutions d'ordre $\equiv 0 \pmod{p}$, par suite de classe N , puisque une de leurs puissances est d'ordre p , par suite de classe N . Il y a d'ailleurs des substitutions d'ordre diviseur de φ qui sont de classe N , et $N-1$ substitutions de classe N , puisque G est primitif et de classe $N-1$. Donc

$$N-1 = \varphi p^2 - 1 > (1 + n_1 p + n_2 p^2)(p^2 - 1) \geq (p^2 + 1)(p^2 - 1) = p^4 - 1,$$

d'où

$$\varphi > p^2,$$

c'est-à-dire

$$\varphi \geq p^2 + 1.$$

Remarque. — Cette limite inférieure peut être améliorée dans une foule de cas : en effet, $1 + n_1 p + n_2 p^2$ doit diviser $\varphi(\varphi p^2 - 1)$, et est égal au moins au plus petit diviseur de $\varphi(\varphi p^2 - 1)$ qui soit $\equiv 1 \pmod{p}$ et $\geq p^2 + 1$. On en conclut :

THÉORÈME II bis. — Soit G un groupe primitif de degré $N = \varphi p^2$ (p premier impair et premier à $\varphi > 1$); de classe $N-1$, si $1 + np$ est le plus petit diviseur de G , et a fortiori de $\varphi(\varphi p^2 - 1)$ qui soit $\geq p^2 + 1$ et $\equiv 1 \pmod{p}$, on a

$$\varphi > \frac{1 + (1 + np)(p^2 - 1)}{p^2}.$$

On en déduit des corollaires analogues à ceux du théorème I bis.

Si $r = \lambda p + 1$, avec $\lambda \geq p$, divise $\varphi(\varphi p^2 - 1)$, d'où

$$\varphi^2 \left(\frac{r-1}{\lambda} \right)^2 - \varphi \equiv 0 \pmod{r},$$

$$\varphi^2 (r-1)^2 - \varphi \lambda^2 \equiv 0 \pmod{r},$$

r divise $\varphi^2 - \varphi \lambda^2 = \varphi(\varphi - \lambda^2)$, ($\varphi > p^2$).

COROLLAIRE I. — Si le nombre $ip + 1$ ne divise pas le nombre $\varphi(\varphi - i^2)$, où $\varphi > p^2$, pour une au moins des valeurs $p, p+1, \dots, \lambda$ de i , ($\lambda \geq p$), on a $n \geq \lambda + 1$,

$$\varphi > \frac{1 + [1 + (\lambda + 1)p](p^2 - 1)}{p^2}.$$

COROLLAIRE II. — Si $\varphi(\varphi > p^2)$ n'est pas égal à $p^2 + 1$, on a $\varphi \geq p(p+1)$.

En effet, si $\varphi(\varphi - p^2)$ n'est pas divisible par $p^2 + 1$, d'après le corollaire précédent, on a $n \geq p + 1$,

$$\varphi p^2 > 1 + (1 + p + p^2)(p^2 - 1) = p^4 + p^3 - p$$

et

$$\varphi \geq p(p + 1).$$

Si $\varphi(\varphi - p^2) \equiv 0 \pmod{p^2 + 1}$ et $\varphi = p^2 + i$, on a

$$\varphi(\varphi - p^2) \equiv (p^2 + 1 + i - 1)i \equiv (i - 1)i \pmod{p^2 + 1},$$

et si $i > 1$, $p^2 + 1$ ne peut diviser $\varphi(\varphi - p^2)$ que si $i > p$.

COROLLAIRE III. — *Soit q un nombre premier de la forme $4h + 1$, a et b les deux racines de la congruence*

$$\xi^2 + 1 \equiv 0 \pmod{q}.$$

Sp est un nombre premier d'une des formes $kq + a$ ou $kq + b$, il faut $\varphi \geq p(p + 1)$, quand φ n'est pas de la forme

$$(4h + 2)q = p^2 + 1.$$

Car on a $p^2 + 1 = (4h + 2)q$, et il n'y a qu'à appliquer le corollaire II.

Et ainsi de suite.

Remarque. — Signalons encore que les théorèmes I et II permettent de démontrer très simplement qu'il n'existe aucun groupe primitif G de classe $N - 1$ et de degré N , quand N est d'une des formes pq , pq^2 , p^2q^2 , où p et q sont des nombres premiers différents ⁽¹⁾. Ainsi pour $N = p^2q^2$, si par exemple $p > q$, G devrait contenir au moins $(p^2 + 1)(p^2 - 1) = p^4 - 1$ substitutions de classe N , ce qui exigerait $p^4 - 1 \leq N - 1 = p^2q^2 - 1$ ou $p \leq q$, contrairement à l'hypothèse.

THÉOREME III. — *Un groupe primitif G de degré $N = \varphi p^m$, et de classe $N - 1$ (p premier impair, $\varphi > 1$ et premier à p) ne peut exister que si $\varphi > \frac{p+1}{2}$.*

En effet, on sait que, si G est primitif, il ne peut contenir un

(1) Thèse de Doctorat, p. 58 et suiv.

sous-groupe invariant d'ordre $\not\equiv 0 \pmod{N}$, puisqu'un sous-groupe invariant de G est transitif ⁽¹⁾. Par suite, si $p > 1$, G ne peut contenir un sous-groupe invariant d'ordre p^0 ($1 \leq \theta \leq m$). Dès lors, d'après la formule de M. Sylow ⁽²⁾,

$$G = p^{m\gamma}(1 + np),$$

où $n > 0$, $p^{m\gamma}$ étant l'ordre du sous-groupe des substitutions de G permutable à un sous-groupe P d'ordre p^m de G : tous les sous-groupes d'ordre p^m de G sont les transformés de P par les substitutions de G , sont en nombre $1 + np$, et toute substitution d'ordre p^0 ($1 \leq \theta \leq m$) de G est contenue dans l'un d'eux ; leurs substitutions déplacent N lettres, et, à part l'unité, font partie des $N - 1$ substitutions de classe N de G .

Or, deux groupes P_1, P_2 transformés quelconques de P par G ont en commun au plus p^{m-1} substitutions dont l'unité. Considérons alors les divers transformés

$$P_1, P_2, \dots, P_{1+np}$$

de P par G :

- P_1 renferme $p^m - 1$ substitutions d'ordre diviseur de p^m et > 1 ;
- P_2 renferme au moins $p^m - p^{m-1}$ substitutions d'ordre diviseur de p^m et > 1 , et différentes de celles de P_1 ;
- P_3 renferme au moins $p^m - p^{m-1} - (p^{m-1} - 1)$ substitutions d'ordre diviseur de p^m et > 1 , et différentes de celles de P_1 et P_2 ;
-
- P_{p+1} renferme au moins $p^m - p(p^{m-1} - 1) - 1 = p - 1$ substitutions d'ordre diviseur de p^m et > 1 , et différentes de celles de $P_1, \dots, P_p$.

Donc, G renferme au moins

$$(p+1)p^m - (p^{m-1}-1)p \frac{p+1}{2} - (p+1) = \frac{p+1}{2} [p^m + p - 2]$$

substitutions dont l'ordre est > 1 et divise p^m .

Or p est > 1 et premier à p ; il y a dans G des substitutions de

(1) JORDAN, *Traité des Subst.*, p. 41

(2) *Loc. cit.*

classe N d'ordre premier à p , et il faut

$$N - 1 = \rho p^m - 1 > \frac{p+1}{2} (p^m + p - 2),$$

d'où

$$\rho > \frac{p+1}{2}.$$

C. Q. F. D.

III.

Grâce aux théorèmes précédents et à ceux que nous avons rappelés dans le paragraphe I, nous pouvons établir le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Les seuls groupes primitifs de classe $N - 1$ et de degré $N \leq 201$ sont ceux de degré égal à p^m (p étant premier) et sont linéaires à indices réels.*

En effet, d'après un théorème connu ⁽¹⁾, il suffit d'établir que ces groupes ne peuvent exister que pour les valeurs de N égales à p^m , p étant premier. D'ailleurs nous savons déjà que ce théorème est vrai pour $N \leq 101$.

La décomposition en facteurs premiers des nombres N compris entre 101 et 201 montre que les seuls de ces nombres qui ne pourraient satisfaire au théorème IV, en vertu des théorèmes rappelés dans le paragraphe I, sont les nombres $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $144 = 3^2 \cdot 2^4$, $156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13 = 12 \cdot 13$, $176 = 2^4 \cdot 11$. Le théorème I permet d'écarter de suite la valeur $N = 12 \cdot 13 = 156$, et le corollaire III du théorème I bis, quand on y fait $q = 3$,

$$p = 11 \equiv -1 \pmod{3},$$

donne, si $\rho \equiv 1 \pmod{3}$, $\rho \geq 23$, ce qui permet d'écarter la valeur $N = 2^4 \cdot 11 = 176$, pour laquelle $\rho = 16 \equiv +1 \pmod{3}$.

Examinons spécialement les valeurs $N = 120$ et $N = 144$. Nous nous appuierons sur les lemmes suivants :

LEMME III. — *Dans un groupe transitif G , d'ordre $G = N\mathfrak{N}$, de classe $N - 1$ et de degré N , le nombre des substitutions de*

(1) Thèse de Doctorat, p. 54.

classe N semblables à une substitution de classe N de G est un multiple de $\mathfrak{H}$.

En effet, les substitutions de G sont toutes régulières ⁽¹⁾, puisque G est de classe N — 1; si g est une substitution de G de classe N, par suite régulière, φ l'ordre du groupe Φ des substitutions de G échangeables à g, ces substitutions sont toutes de classe N, et φ divise N, en sorte que $\frac{G}{\varphi} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{H}}$, g ayant d'ailleurs exactement $\frac{G}{\varphi}$ transformées distinctes par G. Une substitution g', semblable à g, et distincte de ces $\frac{G}{\varphi}$ transformées, aura de même par G $\frac{G}{\varphi}$ transformées distinctes et distinctes des $\frac{G}{\varphi}$ précédentes, avec $\frac{G}{\varphi} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{H}}$; et ainsi de suite. Donc le nombre des substitutions de G, semblables à g, est

$$\frac{G}{\varphi} + \frac{G}{\varphi} + \dots = \mathfrak{H} \left(\frac{N}{\varphi} + \frac{N}{\varphi} + \dots \right) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{H}}.$$

LEMME IV. — On sait que dans un groupe transitif G d'ordre $G = N\mathfrak{H}$, de classe N — 1 et de degré $N = \varphi p$ (p étant premier et $\varphi > 1$ et premier à p), on a, d'après la formule de M. Sylow, $G = p\gamma(1 + hp)$, et G renferme $(1 + hp)(p - 1)$ substitutions d'ordre p, toutes de classe N.

LEMME V. — Tout étant posé comme au lemme IV, si

$$N = \varphi_1 p_1 = \varphi_2 p_2 = \dots = \varphi_k p_k,$$

où φ_1 est premier à p_1 , φ_2 premier à p_2 , ..., φ_k premier à p_k , et $p_1, p_2, \dots, p_k$ premiers entre eux, on a

$$G = p_1 \gamma_1 (1 + h_1 p_1) = \dots = p_k \gamma_k (1 + h_k p_k),$$

d'après la formule de M. Sylow, et G renferme

$$\sum_{i=1}^k i (h_i p_i + 1) (p_i - 1)$$

substitutions de classe N et d'ordre $p_1, p_2, \dots, p_k$.

(1) On remarquera, en effet, que, dans un groupe de classe u, les substitutions de classe u et u + 1 sont régulières; de même, les substitutions de classe u + i et d'ordre premier $p > i$

LEMME VI. — Dans un groupe G d'ordre $G = N\mathfrak{H}$, où $\mathfrak{H}$ est un nombre premier, $N = \mathfrak{p}p^m$ (p premier, $\mathfrak{p} > 1$ et premier à p), la formule de M. Sylow étant $G = p^{m\gamma}(1 + hp)$, où $1 + hp$ est le nombre des sous-groupes de G d'ordre p^m , on a

$$1 + hp \equiv 0 \pmod{\mathfrak{H}},$$

et $1 + hp \geq 2\mathfrak{H}$.

En effet, sinon on aurait $\gamma \equiv 0 \pmod{\mathfrak{H}}$, et G renfermerait un sous-groupe d'ordre $p^{m\gamma}$ contenant H (puisque $\mathfrak{H}$ est premier); H ne serait pas maximum dans G , qui ne serait pas primitif ⁽¹⁾. Alors, si $1 + hp = \mathfrak{H}$, G renfermerait un sous-groupe d'ordre $p^{m\gamma} = N$, et serait ⁽²⁾ linéaire et de degré p^m et non $\mathfrak{p}p^m$.

1° $N = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $N - 1 = 119 = 7 \cdot 17$. G étant supposé primitif, on a $N = n\mathfrak{H} + 1$, avec $n \geq 11$, et $\mathfrak{H}$ diviseur de $N - 1$; il faut donc $\mathfrak{H} = 7$ et $G = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

D'après le lemme IV, $G = 5\gamma(1 + 5h)$ et G renferme $5h + 1$ groupes d'ordre 5, $(5h + 1)4$ substitutions d'ordre 5, et, puisque $\mathfrak{H} = 7$, d'après le lemme III, $5h + 1 \equiv 0 \pmod{7}$ et divise $\frac{G}{5} = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$.

Les diviseurs de ce nombre de la forme $5h + 1$ et divisibles par 7 sont $21 = 3 \cdot 7$ et $56 = 7 \cdot 2^3$. D'ailleurs

$$(5h + 1)4 < N - 1 = 119 \quad \text{et} \quad 5h + 1 < \frac{119}{4} < 30.$$

On ne pourrait donc avoir que $5h + 1 = 21$, $\gamma = 2^3 = 8$, et G renfermerait $(5h + 1)4 = 84$ substitutions d'ordre 5.

On peut raisonner de même sur le diviseur premier 3 de $N = 120$: $G = 3\gamma'(1 + 3h')$ et G renferme $1 + 3h'$ groupes d'ordre 3, et $(3h' + 1)2$ substitutions d'ordre 3, avec

$$(3h' + 1)2 \equiv 0 \pmod{7},$$

d'après les lemmes IV et VI; $3h' + 1$ divise $\frac{G}{3} = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$. De plus,

(1) W. DYCK, *Math. Ann.*, t. XX et XXII, et notre Thèse de Doctorat, p. 18.

(2) Thèse de Doctorat, p. 53.

d'après le lemme V appliqué aux nombres premiers 3 et 5, on a

$$84 + 2(3h' + 1) < 120,$$

d'où $3h' + 1 < 18$. Il n'y a qu'un diviseur $3h' + 1$ de $2^3 \cdot 5 \cdot 7$ qui soit $\equiv 0 \pmod{7}$ et < 18 , c'est 7. Or, d'après le lemme VI, on ne peut avoir $3h' + 1 = 7$, et l'on n'a pas de groupe primitif de classe 119 et de degré 120. c. q. f. d.

2° $N = 144 = 2^4 \cdot 3^2$, $N - 1 = 143 = 13 \cdot 11$. G étant supposé primitif, $N = n\mathcal{H} + 1$, avec $n \geq 11$, en sorte que $\mathcal{H}$ est égal à 11 ou 13.

a. Soit $\mathcal{G} = 144 \cdot 13$, $\mathcal{G} = (3l + 1) \cdot 3^2$, et G renferme $3l + 1$ groupes distincts d'ordre 3^2 ; d'après le lemme VI, $\mathcal{H}$ étant premier, on a $3l + 1 \equiv 0 \pmod{13}$, c'est-à-dire que $3l + 1$, divisant $2^4 \cdot 13$, est un des nombres 13, $2^2 \cdot 13$, $2^4 \cdot 13$.

D'après le lemme II, G renferme au moins $(3l + 1)(3^2 - 1)$ substitutions d'ordre $\equiv 0 \pmod{3}$. Ces substitutions étant de classe $N = 144$, on a

$$(3l + 1)(3^2 - 1) = (3l + 1)8 < 144.$$

d'où $3l + 1 < \frac{144}{8} = 18$, ce qui exigerait $3l + 1 = 13$, contrairement au lemme VI.

b. Soit $\mathcal{G} = 144 \cdot 11$, $\mathcal{G} = (3l + 1) \cdot 3^2$, et G renferme $3l + 1$ groupes d'ordre 3^2 ; d'après le lemme VI, $\mathcal{H}$ étant premier, on a $3l + 1 \equiv 0 \pmod{11}$, c'est-à-dire que $3l + 1$ divisant $2^4 \cdot 11$ est un des nombres $2 \cdot 11$ ou $2^3 \cdot 11$.

D'après le lemme II, on a encore $3l + 1 < 18$, en sorte que G ne peut exister.

On n'a donc pas de groupe primitif de classe 143 et de degré 144.

c. q. f. d.

Le théorème IV se trouve ainsi complètement établi.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 3 FÉVRIER 1897.

PRÉSIDENTIE DE M. PICARD.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Dumont, présenté par MM. Laisant et Bioche; M. Nicollier, présenté par MM. Raffy et Dumas; M. Cabreira, présenté par MM. Laisant et d'Ocagne.

Communications :

M. Picard : *Développements en séries des intégrales des systèmes d'équations différentielles.*

M. Duporcq : *Sur les barycentres des surfaces parallèles.*

M. Félix Lucas communique la Note suivante :

Note relative à la théorie des nombres.

Considérons le polynôme

$$\varphi_m = (x + y)^m - x^m - y^m,$$

en supposant l'exposant m premier et impair.

On a, identiquement, les formules particulières

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi_3 = 3xy(x+y), \\ \varphi_5 = 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2), \\ \varphi_7 = 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2, \\ \varphi_{11} = 11xy(x+y)(x^2+xy+y^2) [(x^2+xy+y^2)^3 + x^2y^2(x+y)^2], \\ \varphi_{13} = 13xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2 [(x^2+xy+y^2)^3 + 2x^2y^2(x+y)^2]. \end{cases}$$

On a aussi les formules générales :

1° Pour $m = 6k + 1$, l'entier k étant supérieur à 2,

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi_m = mxy(x+y)(x^2+xy+y^2) \\ \times \left[(x^2+xy+y^2)^{\frac{m-3}{2}} + x^2y^2(x+y)^2U \right], \end{cases}$$

XXV, 3

U étant un polynôme homogène du degré $m - 11$, dont la valeur pour $m = 17$ est

$$U = 5(x^6 + y^6) + 15xy(x^4 + y^4) + 31x^2y^2(x^2 + y^2) + 37x^3y^3;$$

2° Pour $m = 6k + 1$, l'entier k étant supérieur à 2,

$$(3) \quad \begin{cases} z_m = mxy(x-y)(x^2 + xy + y^2)^2 \\ \quad \times \left[(x^2 + xy + y^2)^{\frac{m-7}{2}} + x^2y^2(x+y)^2V \right], \end{cases}$$

V étant un polynôme homogène du degré $m - 13$, dont la valeur pour $m = 19$ est

$$V = 7(x^6 + y^6) + 21xy(x^4 + y^4) + 45x^2y^2(x^2 + y^2) + 55x^3y^3.$$

La démonstration de ces formules, que je crois nouvelles, ne présente aucune difficulté sérieuse.

Elles conduisent immédiatement au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Désignons par m un exposant premier impair et par x et y deux entiers premiers entre eux et considérons le binôme $x^m + y^m$.*

Si $(x + y)$ est premier avec m , il est premier aussi avec $\frac{x^m + y^m}{x + y}$.

Si $(x + y)$ est divisible par m , le produit $m(x + y)$ est premier avec $\frac{x^m + y^m}{m(x + y)}$.

Voici un corollaire de ce théorème. Si l'équation

$$x^m + y^m = z^m$$

était résolue en nombres entiers, on aurait nécessairement :

1° Si aucun des binômes premiers entre eux $x + y$, $z - x$ et $z + y$ n'était divisible par m ,

$$(4) \quad \begin{cases} x + y = z^m, & z = zA, \\ z - x = y^m, & y = yB, \\ z + y = x^m, & x = xC. \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma, A, B, C$ étant six nombres premiers entre eux deux à deux.

2° Si un des binômes dont il s'agit, soit, par exemple, $(x + y)$, était un multiple de m ,

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x + y = m^{m-1} \alpha^m & z = m \alpha A \\ z - x = \beta^m & y = \beta B \\ z - y = \gamma^m & x = \gamma C, \end{array} \right.$$

$m \alpha, \beta, \gamma, A, B, C$ étant six nombres premiers entre eux deux à deux.

Mon savant ami, M. Jordan, membre de l'Institut, auquel j'ai communiqué ces formules (4) et (5), m'a appris qu'elles étaient déjà connues de lui.

M. Émile PICARD adresse la Note suivante :

Remarques au sujet d'une Communication récente de M. I. Bendixson⁽¹⁾.

Je viens de lire, dans le dernier Cahier du *Bulletin de la Société mathématique*, une intéressante étude de M. Bendixson relative à l'existence de l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} f(x, y) = 0,$$

quand on ne suppose pas que la fonction $f(x, y)$ est analytique. Je me permets de faire remarquer que je me suis occupé de la même question à la fin d'une Note relative aux méthodes d'approximations successives, qui a été insérée par M. Darboux dans le tome IV de ses *Leçons sur la Géométrie des surfaces* (p. 353), et imprimée en juin 1895. La méthode que j'ai suivie diffère d'ailleurs de celle du savant géomètre de Stockholm; aussi son article conserve-t-il tout son intérêt.

(1) Annexe au procès-verbal de la séance du 3 février (Note reçue le 8 février). Le travail de M. Bendixson a été présenté à la Société dans la séance du 5 février 1896. Les Notes qui complètent le quatrième Volume de l'Ouvrage de M. Darboux ont paru en mai 1896. (Red.).

SÉANCE DU 17 FÉVRIER 1897.

PRÉSIDENTE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. Grévy : *Sur les équations fonctionnelles avec second membre.*

M. d'Ocagne : *Construction de la conique osculatrice en un point d'une courbe plane.*

M. Raffy : *Sur une transformation analogue aux transformations de contact.*

M. Goursat adresse un Mémoire *Sur une équation aux dérivées partielles.*

M. d'Ocagne présente, de la part de M. Greenhill, un stéréoscope et une collection de diagrammes stéréoscopiques. Ces figures permettent de voir en relief des exemples de chaînette sphérique et de courbe gyrostatique, choisis dans les cas où leur détermination a été obtenue par M. Greenhill au moyen des intégrales pseudo-elliptiques.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

Par M. E. GOURSAT.

I. L'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(1) \quad s^2 - 4\lambda(x, y)pq = 0,$$

où $\lambda(x, y)$ est une fonction quelconque de x et de y , peut se ramener, par une transformation simple, à une équation linéaire qui se rapproche des équations à invariants égaux. Posons

$$p = u^2, \quad q = v^2;$$

l'équation (1) nous donne

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{\lambda} v, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \sqrt{\lambda} u, \end{cases}$$

et l'élimination de v entre ces deux relations conduit à l'équation linéaire

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \lambda}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda u = 0.$$

Si u est une intégrale de l'équation (3), on en déduira une intégrale de l'équation (1) par une quadrature

$$z = \int u^2 dx + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy,$$

et l'on obtiendra ainsi toutes les intégrales de cette équation. Lorsque la fonction $\lambda(x, y)$ est réelle, à toute solution réelle de l'équation en u correspond une solution réelle de l'équation en z : si u est de la forme $i f(x, y)$, $f(x, y)$ étant une fonction réelle, z est encore réelle. D'ailleurs, à toute intégrale réelle de l'équation en z , correspond une fonction u qui est réelle ou qui est de la forme $i f(x, y)$. En remarquant que, quand on change u en iu , z se change en $-\bar{z}$, on en conclut que, pour avoir toutes les intégrales réelles de l'équation (1), il suffit de connaître toutes les intégrales réelles de l'équation (3).

Les invariants de l'équation (3) ont pour valeurs

$$h = \lambda, \quad k = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y} + \lambda;$$

les invariants de l'équation (E₁), obtenue en appliquant à l'équation (E) la transformation de Laplace $u_1 = \frac{\partial u}{\partial y}$, ont pour valeurs

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y} = k, \quad k_1 = h.$$

Ils sont donc égaux à ceux de l'équation (E) pris dans l'ordre

inverse; en d'autres termes, l'équation adjointe de l'équation (E) a les mêmes invariants que l'équation (E₁) qu'on déduit de (E) par l'application d'une des transformations de Laplace.

Si la suite de Laplace relative à l'équation (E) se termine dans un sens, du côté des indices positifs, par exemple, après n transformations, on sait que la suite relative à l'équation adjointe ou à l'équation (E₁) doit se terminer du côté des indices négatifs après n transformations également: comme, après une première transformation appliqué à (E₁), on retrouve (E), on en conclut que la suite de Laplace relative à (E) se termine, du côté des indices négatifs, après $n - 1$ transformations.

Toute équation linéaire (E), qui est telle que l'équation (E₁) qu'on en déduit par la première transformation de Laplace ait les mêmes invariants que l'équation adjointe de (E), peut se ramener à une équation de la forme (3). En effet, en changeant u en $K(x, y)u$, on peut toujours ramener l'équation linéaire à la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0;$$

les invariants ont les valeurs suivantes :

$$h = -c, \quad k = \frac{\partial b}{\partial y} = c,$$

tandis que les invariants de la transformée (E₁) sont

$$h_1 = -c - \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial^2 \log c}{\partial x \partial y}, \quad k_1 = -c.$$

Pour que les invariants h_1 et k_1 de cette équation soient identiques aux invariants k et h de l'adjointe, il suffira que l'on ait $h_1 = k$, ou

$$2 \frac{\partial b}{\partial y} = - \frac{\partial^2 \log c}{\partial x \partial y};$$

L'équation doit donc être de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(2 \frac{\partial \log c}{\partial x} + \lambda \right) \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0.$$

et il suffit d'y remplacer u par $ue^{\int_{x_0}^x x \, dx}$ et c par $-\lambda$, pour retrouver l'équation (3).

2. A toute équation de la forme (3), intégrable par la méthode de Laplace, correspond ainsi une équation (1) qui s'intégrera par des quadratures. La détermination des valeurs de λ , pour lesquelles il en est ainsi revient, d'après ce qui précède, au problème suivant : *Trouver toutes les suites de Laplace, terminées dans les deux sens et composées d'un nombre pair $2n$ d'équations, telles que deux équations à égale distance des extrêmes aient les mêmes invariants disposés dans l'ordre inverse.* On peut obtenir la solution de ce problème par des considérations analogues à celles dont s'est servi M. Darboux pour obtenir toutes les équations à invariants égaux, pour lesquelles la suite de Laplace ne contient qu'un nombre fini d'équations. Il faut se servir d'équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante et d'ordre pair, équivalentes à leur adjointe, au lieu des équations d'ordre impair qui interviennent dans le problème traité par M. Darboux.

Lorsque l'équation (3) est intégrable par la méthode de Laplace, l'intégrale générale de l'équation (1) appartient à la première classe d'Ampère, ainsi qu'il résulte du théorème général suivant :

Si l'expression

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, y, X, X', \dots, X^{(p)}, Y, Y', \dots, Y^{(p)}) \, dx \\ + \psi(x, y, X, X', \dots, X^{(p)}, Y, Y', \dots, Y^{(p)}) \, dy, \end{array} \right.$$

où X est une fonction arbitraire de x , Y une fonction arbitraire de y , et où φ et ψ renferment X et Y et leurs dérivées jusqu'à un ordre déterminé, est une différentielle exacte pour toutes les formes possibles des fonctions X et Y , on a

$$\int \varphi \, dx + \psi \, dy = \int F(x, X, X', \dots, X^{(p)}) \, dx + \int F_1(y, Y, Y', \dots, Y^{(p)}) \, dy \\ + F_2(x, y, X, \dots, X^{(p-1)}, Y, Y', \dots, Y^{(p-1)}),$$

F ne renfermant que $x, X, X', \dots, X^{(p)}$; F_1 ne renfermant

que $y, Y, Y', \dots, Y^{(p)}$, et F_2 étant une fonction déterminée des variables qui y figurent ⁽¹⁾.

Supposons, pour fixer les idées, que les dérivées de l'ordre le plus élevé des fonctions X, Y , qui figurent dans φ et ψ sont celles d'ordre p , de telle sorte que l'une des dérivées $X^{(p)}, Y^{(p)}$ entre dans l'une au moins des fonctions φ et ψ , mais qu'il n'y entre aucune dérivée d'ordre supérieur à p . Par hypothèse, on doit avoir, pour toutes les formes possibles des fonctions X et Y ,

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\psi}{dx},$$

en posant

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dy} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial Y} Y' + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial Y^{(p-1)}} Y^{(p)} + \frac{\partial \varphi}{\partial Y^{(p)}} Y^{(p+1)}, \\ \frac{d\psi}{dx} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial X} X' + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial X^{(p-1)}} X^{(p)} + \frac{\partial \psi}{\partial X^{(p)}} X^{(p+1)}; \end{aligned}$$

on voit que $\frac{d\psi}{dx}$ ne contient pas $Y^{(p+1)}$ et que $\frac{d\varphi}{dy}$ ne contient pas $X^{(p+1)}$. Il faudra donc que l'on ait

$$\frac{\partial \varphi}{\partial Y^{(p)}} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial X^{(p)}} = 0,$$

c'est-à-dire que φ ne contiendra les dérivées de la fonction Y que jusqu'à celles d'ordre $p-1$ au plus, et de même ψ ne contiendra les dérivées de X que jusqu'à celle d'ordre $p-1$ au plus. Alors $\frac{d\psi}{dx}$, et par suite $\frac{d\varphi}{dy}$, doit être une fonction linéaire de $X^{(p)}$. On doit donc avoir

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)}{[\partial X^{(p)}]^2} = 0,$$

(1) La proposition s'étend sans difficulté aux expressions

$$\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \dots + \varphi_n dx_n,$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ enferment n fonctions arbitraires $X_1, X_2, \dots, X_n$ de $x_1, x_2, \dots, x_n$ respectivement, et leurs dérivées en nombre fini, qui sont des différentielles totales exactes pour toutes les formes possibles des fonctions arbitraires.

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{d}{dy} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{(\partial X^{(p)})^2} \right] = 0,$$

ce qui montre que $\frac{\partial^2 \varphi}{(\partial X^{(p)})^2}$ est indépendant de $y, Y, Y', \dots, Y^{(p-1)}$,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{(\partial X^{(p)})^2} = v(x, X, X', X'', \dots, X^{(p)}).$$

On en déduit que φ est de la forme

$$\begin{aligned} \varphi = & \Phi(x, X, X', \dots, X^{(p)}) + \Phi_1(x, y, X, X', \dots, X^{(p-1)}, Y, Y', \dots, Y^{(p-1)}) X^{(p)} \\ & + \Phi_2(x, y, X, X', \dots, X^{(p-1)}, Y, \dots, Y^{(p-1)}), \end{aligned}$$

et l'on démontrera de la même façon que ψ doit être de la forme

$$\begin{aligned} \psi = & \Psi(y, Y, Y', \dots, Y^{(p)}) + \Psi_1(x, y, X, X', \dots, X^{(p-1)}, Y, Y', \dots, Y^{(p-1)}) Y^{(p)} \\ & + \Psi_2(x, y, X, X', \dots, X^{(p-1)}, Y, \dots, Y^{(p-1)}). \end{aligned}$$

Le coefficient de $X^{(p)} Y^{(p)}$ est $\frac{\partial \Phi_1}{\partial Y^{(p-1)}}$ dans $\frac{d\varphi}{dy}$, et $\frac{\partial \Psi_1}{\partial X^{(p-1)}}$ dans $\frac{d\psi}{dx}$; on doit donc avoir

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial Y^{(p-1)}} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial X^{(p-1)}},$$

ce qui montre que Φ_1 et Ψ_1 sont les dérivées partielles par rapport à $X^{(p-1)}$ et $Y^{(p-1)}$ respectivement d'une fonction

$$U(x, y, X, X', \dots, X^{(p-1)}, Y, Y', \dots, Y^{(p-1)}) = \int \Phi_1 dX^{(p-1)} + \Psi_1 dY^{(p-1)}.$$

La différentielle totale de cette fonction U a pour expression

$$\begin{aligned} dU = & \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial X} X' + \dots + \frac{\partial U}{\partial X^{(p-2)}} X^{(p-1)} \right) dx \\ & + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial Y} Y' + \dots + \frac{\partial U}{\partial Y^{(p-2)}} Y^{(p-1)} \right) dy \\ & + \Phi_1 X^{(p)} dx + \Psi_1 Y^{(p)} dy, \end{aligned}$$

et l'on peut écrire

$$\int \varphi dx + \psi dy = \int \Phi dx + \int \Psi dy + U + \int \varphi_1 dx + \psi_1 dy,$$

en posant

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \Phi_2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial X} X + \dots + \frac{\partial U}{\partial X^{(p-2)}} X^{p-1} \right), \\ \psi_1 &= \Psi_2 - \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial Y} Y + \dots + \frac{\partial U}{\partial Y^{(p-2)}} Y^{p-1} \right).\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que $\varphi_1 dx + \psi_1 dy$ doit être une différentielle exacte pour toutes les formes possibles des fonctions arbitraires X et Y , et que φ_1 et ψ_1 ne renferment les dérivées de ces fonctions que jusqu'à l'ordre $p-1$ au plus. En répétant les mêmes opérations sur $\int \varphi_1 dx + \psi_1 dy$, et poursuivant l'application du procédé autant de fois qu'il est possible, on finira par arriver à une intégrale de la forme

$$\int \varphi_p(x, y, X) dx + \psi_p(x, y, Y) dy,$$

où l'expression $\varphi_p dx + \psi_p dy$ doit être une différentielle exacte pour toutes les formes possibles de X et de Y . On doit donc avoir

$$\frac{\partial \varphi_p}{\partial y} = \frac{\partial \psi_p}{\partial x},$$

or φ_p ne contient pas Y , il doit donc en être de même de $\frac{\partial \psi_p}{\partial x}$, c'est-à-dire que ψ_p est de la forme $P(x, Y) + Q(x, y)$.

On voit de même que φ_p doit être de la forme $M(x, X) + N(x, y)$, et la condition d'intégrabilité devient $\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

L'intégrale en question peut donc s'écrire

$$\int \varphi_p dx + \psi_p dy = \int M(x, X) dx + \int P(x, Y) dy + \int N dx + Q dy.$$

En réunissant tous les résultats obtenus, on obtient bien pour l'intégrale $\int \varphi dx + \psi dy$ une expression de la forme annoncée.

Remarque. — Si l'on suppose que les fonctions φ et ψ soient

linéaires par rapport aux fonctions X , Y et à leurs dérivées, on retrouve le théorème démontré par M. Darboux ⁽¹⁾, et qui est d'un grand usage dans l'étude des équations linéaires. En effet, les fonctions φ et ψ sont alors de la forme

$$\begin{aligned}\varphi &= A_0 X + A_1 X' + \dots + A_p X^{(p)} + B_0 Y + B_1 Y' + \dots + B_{p-1} Y^{(p-1)}, \\ \psi &= C_0 X + C_1 X' + \dots + C_{p-1} X^{(p-1)} + D_0 Y + D_1 Y' + \dots + D_p Y^{(p)},\end{aligned}$$

A_i , B_i , C_i , D_i étant des fonctions déterminées de x et de y ; si l'on pose

$$U = A_p X^{(p-1)} + D_p Y^{(p-1)},$$

on peut écrire

$$\int \varphi dx + \psi dy = U - \int \varphi_1 dx + \psi_1 dy,$$

φ_1 et ψ_1 étant des expressions de même forme que φ et ψ , qui ne renferment plus que les dérivées de X et de Y , jusqu'à l'ordre $p-1$ au plus. En continuant ainsi, on arrivera à une expression

$$aXdx + bYdy,$$

qui devra être une différentielle exacte pour toutes les formes possibles des fonctions X et Y , ce qui exige que a ne dépende que de la variable x , et que b ne dépende que de la variable y . Si ces fonctions ne sont pas nulles, on fera disparaître tous les signes de quadrature, en remplaçant X par $\frac{X_1'}{a}$ et Y par $\frac{Y_1'}{b}$, X_1 et Y_1 désignant deux nouvelles fonctions arbitraires de x et de y respectivement.

3. Lorsque la fonction $\lambda(x, y)$ est de la forme $\lambda = \frac{k}{(x+y)^2}$, k désignant une constante, les équations (1) et (3) deviennent respectivement

$$(1) \quad s^2 = \frac{4kpq}{(x+y)^2} = 0,$$

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{x+y} - \frac{ku}{(x+y)^2} = 0;$$

(1) *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. II, p. 151.

si l'on forme la suite de Laplace relative à l'équation (3)' du côté des indices positifs, on trouve que les invariants successifs ont pour valeurs

$$\frac{k}{(x+y)^2}, \quad \frac{k-1}{(x+y)^2}, \quad \frac{k-4}{(x+y)^2}, \quad \dots, \quad \frac{k-n^2}{(x+y)^2}, \quad \dots$$

Pour que la suite soit limitée, il faut et il suffit, d'après cela, que k soit le carré d'un nombre entier.

Examinons les cas les plus simples. Si $k=1$, l'intégrale générale de l'équation (3)', est

$$u = X' + \frac{Y-X}{x+y};$$

on a ensuite, d'après les formules (2),

$$v = (x-y) \frac{\partial u}{\partial y} = Y' + \frac{X-Y}{x+y},$$

et l'intégrale générale de l'équation

$$(5) \quad s = \frac{2\sqrt{pq}}{x+y}$$

est, d'après cela,

$$(6) \quad z = \int \left(X' + \frac{Y-X}{x+y} \right)^2 dx + \left(Y' + \frac{X-Y}{x+y} \right)^2 dy.$$

Si l'on applique à cette expression le théorème général qui vient d'être démontré, on trouve qu'elle peut encore s'écrire

$$z = \frac{(Y-X)^2}{x+y} + \int X'^2 dx + \int Y'^2 dy.$$

Pour faire disparaître les quadratures, il suffira d'introduire deux nouvelles variables indépendantes α et β , en posant

$$X = \alpha, \quad Y = \beta, \quad x = \varphi'(\alpha), \quad y = \varphi'(\beta),$$

ce qui nous donne

$$X = \int X' dx = \int x \varphi'''(x) dx = x \varphi''(x) - \varphi'(x),$$

$$\int X'^2 dx = \int x^2 \varphi'''(x) dx = x^2 \varphi''(x) - 2x \varphi'(x) + 2 \varphi(x),$$

et de même

$$Y = \beta \psi''(\beta) - \psi'(\beta),$$

$$\int Y'^2 d\beta = \beta^2 \psi'''(\beta) - 2\beta \psi''(\beta) + 2\psi(\beta).$$

L'intégrale générale de l'équation (5) est donc représentée par les formules

$$(7) \quad \begin{cases} x = \varphi''(x), & y = \psi''(\beta), \\ z = x^2 \varphi'''(x) - 2x \varphi'(x) + 2\varphi(x) + \beta^2 \psi'''(\beta) - 2\beta \psi'(\beta) + 2\psi(\beta), \\ \quad - \frac{[x \psi''(x) - \varphi'(x) - \beta \psi''(\beta) + \psi'(\beta)]^2}{\varphi''(x) + \psi''(\beta)}, \end{cases}$$

x et β étant deux paramètres variables, φ et ψ deux fonctions arbitraires. On remarquera que l'intégrale générale de cette équation contient explicitement les deux fonctions arbitraires, sans que cette équation appartienne à la classe étudiée par M. Moutard.

Lorsque $k = 4$, l'intégrale générale de l'équation (3) est

$$u = X'' - \frac{4X'}{x+y} + \frac{6X}{(x+y)^2} + \frac{2Y'}{x+y} - \frac{6Y}{(x+y)^2},$$

et la valeur correspondante de v est

$$v = \frac{x+y}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = Y'' - \frac{4Y'}{x+y} + \frac{6Y}{(x+y)^2} + \frac{2X'}{x+y} - \frac{6X}{(x+y)^2}.$$

L'intégrale générale de l'équation

$$s = \frac{4\sqrt{pq}}{x+y}$$

est donc représentée par la formule

$$z = \int u^2 dx + v^2 dy.$$

qui devient, en appliquant le théorème général.

$$z = \int X'^2 dx + \int Y'^2 dy - 4 \frac{X'^2 + Y'^2}{x + y} + 12 \frac{XX' + YY'}{(x + y)^2} + \frac{4X'Y'}{x + y} - 12 \frac{XY' + X'Y}{(x + y)^2} - 12 \frac{(X - Y)^2}{(x + y)^3}.$$

Je citerai, comme autre exemple d'équation à laquelle on peut appliquer la transformation précédente, l'équation $s^2 = 4pq$, qui a été rencontrée par M. Thomas Craig dans certains problèmes de la théorie des surfaces, et que l'on ramène ainsi à l'équation bien connue $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u$.

4. La transformation qui vient d'être étudiée peut être rattachée à une question plus générale. D'après la façon même dont nous avons obtenu l'équation (3), si nous posons

$$M = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad N = -u^2,$$

nous avons l'identité

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{2}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \lambda}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda u \right).$$

Pour abréger, convenons d'appeler *multiplicateur* d'une équation linéaire

$$(8) \quad F(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

toute fonction μ renfermant les variables x, y, z , et les dérivées partielles de z jusqu'à un ordre quelconque, telle que le produit $\mu F(z)$ soit de la forme

$$\mu F(z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y},$$

M et N étant également des fonctions déterminées de x, y, z , et des dérivées partielles de z par rapport à x et à y . Nous voyons que $\frac{2}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial y}$ est un multiplicateur pour l'équation linéaire (3).

Étant donnée une équation linéaire quelconque (8), on sait

qu'il existe toujours une infinité de multiplicateurs $u(x, y)$ ne renfermant que les variables indépendantes x et y ; pour que $u(x, y)$ soit un multiplicateur de $F(z)$, il faut et il suffit que u vérifie une équation linéaire de même forme, qui est dite *équation adjointe de la première*

$$(9) \quad G(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} \right) u = 0.$$

Si les coefficients a , b , c de l'équation (8) sont quelconques, on reconnaît aisément qu'il n'existe pas d'autres multiplicateurs que les fonctions $u(x, y)$ qui satisfont à l'équation adjointe. Sans vouloir entrer ici dans l'étude détaillée de cette question, nous montrerons comment on peut prévoir *a priori* l'existence de cas très étendus où il existe des multiplicateurs, renfermant non seulement les variables x et y , mais aussi z et ses dérivées, jusqu'à un ordre aussi élevé qu'on le veut.

Rappelons d'abord l'identité

$$(10) \quad uF(z) - zG(u) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y},$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} M &= auz - \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ N &= buz + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Supposons que l'équation proposée $F(z) = 0$ soit telle que l'on puisse passer de cette équation à son adjointe par une de ces transformations (m, n) , étudiées si complètement par M. Darboux. En d'autres termes, supposons que l'intégrale générale de l'équation (9) est donnée par la formule

$$(11) \quad u = Az + B_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \dots + B_m \frac{\partial^m z}{\partial x^m} + C_1 \frac{\partial z}{\partial y} + \dots + C_n \frac{\partial^n z}{\partial y^n},$$

$A, B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_n$ étant des fonctions déterminées de x et de y et z l'intégrale générale de l'équation $F(z) = 0$. Si l'on substitue l'expression précédente à la place de u dans $G(u)$, le résultat devra être identiquement nul, pourvu que z vérifie l'équa-

tion $F(z) = 0$; on aura donc, en supposant u remplacé par l'expression (11), une identité de la forme

$$(12) \quad G(u) = \alpha F(z) + \sum \beta_{ik} \frac{\partial^{i+k} F(z)}{\partial x^i \partial y^k},$$

les coefficients α et β_{ik} ne dépendant que de x et de y . Si l'on fait la même substitution dans l'identité (10), on arrive à une nouvelle relation de la forme

$$(13) \quad \alpha' F(z) + \sum \beta'_{ik} \frac{\partial^{i+k} F(z)}{\partial x^i \partial y^k} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y},$$

$P, Q, \alpha', \beta'_{ik}$ renfermant x, y et z et les dérivées partielles de z . Maintenant, une suite d'intégrations par parties permet de ne laisser dans le premier membre que des termes divisibles par $F(z)$. Par exemple, si i est positif, on peut écrire

$$\beta'_{ik} \frac{\partial^{i+k} F(z)}{\partial x^i \partial y^k} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta'_{ik} \frac{\partial^{i+k-1} F(z)}{\partial x^{i-1} \partial y^k} \right] - \frac{\partial \beta'_{ik}}{\partial x} \frac{\partial^{i+k-1} F(z)}{\partial x^{i-1} \partial y^k},$$

et l'on a une formule analogue pour diminuer l'indice k d'une unité. En continuant ainsi et en faisant passer toutes les dérivées dans le second membre, on finira par arriver à une identité de la forme

$$\mu F(z) = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y},$$

μ pouvant contenir les dérivées partielles de z jusqu'à un ordre quelconque, pourvu que m et n soient assez grands. Cette fonction μ est, d'après l'identité finale, un multiplicateur pour l'équation $F(z) = 0$.

On retrouve la transformation considérée au début de ce travail en supposant que la transformée (E_1) de l'équation (8) a les mêmes invariants que l'adjointe de cette équation; on peut alors passer de l'équation (8) à son adjointe par une transformation de la forme

$$u = A \frac{\partial z}{\partial y} + Bz.$$

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 3 MARS 1897.

PRÉSIDENCE DE M. PICARD.

Communications :

M. Desaint : *Sur les fonctions entières.*

M. Touche : *Sur la vitesse de transmission du mouvement.*

M. Lecornu : *Sur un problème de minimum.*

M. Le Roux adresse un Mémoire *Sur l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre.*

M. Demoulin adresse un Mémoire *Sur les surfaces qui présentent un réseau conjugué formé par des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe tétraédral.*

M. PICARD fait une Communication *Sur la théorie des surfaces algébriques*, au point de vue de la Géométrie de situation, et les intégrales de différentielles totales. Il énonce le théorème suivant : *Si p_1 désigne l'ordre de connexion linéaire d'une surface algébrique, celle-ci possédera $p_1 - 1$ intégrales distinctes de différentielles totales de seconde espèce.*

M. ANDRADE adresse la Note suivante :

Sur la stabilité.

Lorsque des corps, soumis à des liaisons, demeurent en équilibre sous l'action de forces données, on sait que l'équilibre subsiste *a fortiori* quand aux liaisons déjà existantes on ajoute des liaisons nouvelles, en d'autres termes quand on *renforce* les liaisons. Ce principe intervient dans la démonstration du principe des vitesses virtuelles, dont il est d'ailleurs une conséquence nécessaire. De plus ce principe est évident.

Mais on tomberait dans une singulière méprise, si, se fiant à l'évidence du principe, on voulait, dans l'énoncé précédent, associer à l'idée de l'équilibre l'idée de stabilité. Et pourtant l'évidence apparente n'est-elle pas la même dans les deux cas? J'ai longtemps cru moi-même à la possibilité de généraliser ainsi le

principe du renforcement des liaisons. Je me propose, dans cette Note, de démontrer *par un exemple simple* l'impossibilité de cette généralisation.

Un cas très particulier du principe dont il s'agit, étendu de l'équilibre à la stabilité, serait en effet le suivant :

Si deux forces laissent chacune un même corps en une même position d'équilibre STABLE, leur résultante laissera le corps en la même position d'équilibre STABLE. Or cette proposition est fausse.

En effet, je vais définir deux forces (fonctions de point) qui, agissant séparément sur un même point matériel, s'annulent chacune en une même position d'équilibre *stable*, et dont la résultante ne jouit pas de la même propriété.

J'envisage à cet effet deux formes quadratiques φ et ψ des coordonnées cartésiennes rectangles x, y, z du mobile. Je suppose de plus que chacune de ces formes est définie et négative. Je désigne par $\alpha, \beta, \gamma; \lambda, \mu, \nu$ six constantes *positives* dont les trois dernières ne soient pas proportionnelles aux premières, et je considère les forces F et G définies par leurs composantes

$$(F) \quad \begin{aligned} \nu F_x &= \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & 2 F_y &= \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y}, & 2 F_z &= \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$(G) \quad \begin{aligned} 2 G_x &= \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x}, & 2 G_y &= \mu \frac{\partial \psi}{\partial y}, & 2 G_z &= \nu \frac{\partial \psi}{\partial z}; \end{aligned}$$

envisageons les mouvements d'un même point matériel sous les actions séparées de ces deux forces. Le premier équilibre est stable autour de l'origine, car en faisant dans les équations de ce mouvement les changements de fonctions

$$x \mid x\sqrt{\alpha}, \quad y \mid y\sqrt{\beta}, \quad z \mid z\sqrt{\gamma},$$

on est ramené au cas d'une fonction des forces maxima au point ($x = 0, y = 0, z = 0$). Pour une raison analogue le second équilibre est encore stable.

Je dis maintenant qu'on peut choisir les formes f et φ , conformément aux hypothèses déjà faites sur elles, de manière à assurer l'instabilité de l'équilibre autour de l'origine du même point matériel sous l'action simultanée des forces F et G.

Si, par exemple, $xy = \lambda \neq 0$, je ferai

$$\begin{aligned}\varphi &= -[ax^2 + 2bxy + cy^2] - dz^2 & (a, c, d > 0, \quad b^2 - ac < 0), \\ \psi &= -[a'x^2 + 2b'xy + c'y^2] - d'z^2 & (a', c', d' > 0, \quad b'^2 - a'c' < 0).\end{aligned}$$

Les équations différentielles *linéaires* du mouvement *estimé* dans le plan des xy auront pour intégrales fondamentales diverses fonctions du temps t

$$x = ger^t, \quad y = her^t,$$

et l'équation *caractéristique* en r sera

$$\begin{aligned}r^4 + r^2(ax + a'\lambda + c\beta + c'\mu) + (ax + a'\lambda)(c\beta + c'\mu) \\ - (bx + b'\lambda)(b\beta + b'\mu) = 0.\end{aligned}$$

Et la stabilité, au sens habituel du mot, *exige* que cette équation en r^2 n'ait que des racines négatives.

Or il est aisé de voir qu'on peut satisfaire à cette équation par des valeurs imaginaires de r^2 , car le discriminant est ici

$$\Delta = (ax + a'\lambda - c\beta - c'\mu)^2 + 4(bx + b'\lambda)(b\beta + b'\mu).$$

Or que l'on fasse d'abord

$$ax + a'\lambda = c\beta + c'\mu,$$

ensuite, que l'on choisisse b et b' assez petits en valeur absolue pour satisfaire aux conditions

$$b^2 - ac < 0, \quad b'^2 - a'c' < 0,$$

mais que l'on choisisse le rapport $\frac{b'}{b}$ intermédiaire entre les nombres $-\frac{\alpha}{\lambda}$ et $-\frac{\beta}{\mu}$ et l'on aura $\Delta < 0$: donc instabilité.

On voit nettement par cet exemple que, hormis le cas où les forces dérivent chacune d'une fonction des forces, on ne peut pas conclure des stabilités partielles à une stabilité résultante.

M. LÉMERAY adresse la Communication suivante :

Sur la dérivée des fonctions itératives au point limite.

1. Dans les *Annales de Clebsch*, 1870, Schroeder donne un

procédé qui permet, étant donnée une fonction itérable, de former d'autres fonctions itérables. Ce moyen revient, en somme, au suivant : soient Y et z deux fonctions définies par les relations

$$(1) \quad Y = \varphi X,$$

$$(2) \quad qz = \varphi qx;$$

si l'on sait itérer la première, c'est-à-dire écrire une relation de la forme

$$Y_n = \varphi^n X = \psi(n, X),$$

on saura itérer la seconde, et même l'itérer explicitement, si l'on sait inverser la fonction q ; car, éliminant X et Y entre les équations

$$Y = qz, \quad Y = \varphi X, \quad X = qx,$$

on aura

$$z = q^{-1}\varphi qx \quad \text{et} \quad z_n = q^{-1}\varphi^n qx = q^{-1}\psi(n, qx).$$

2. Soit α un point limite de la substitution $x, \varphi x$ ou plus généralement un point racine de l'équation

$$(1') \quad \varphi x - x = 0.$$

le point racine correspondant de l'équation

$$(2') \quad \varphi qx - qx = 0$$

sera donné par l'équation $qx = \alpha$ et l'on aura la racine (ou les racines)

$$x = q^{-1}\alpha = \beta.$$

Dérivons l'équation (2); il vient

$$q'(z), z'(x) = \varphi'(q), q'(x).$$

Au point racine de l'équation (2'), on a $z = x$ et, par suite, $q'(z) = q'(x)$; de plus, $\varphi'(q)$ n'est autre que $\varphi'(x)$, où x est remplacé par qx , et, comme au point racine de (2'), $qx = \alpha$, il reste

$$z'(\beta) = Y'(z).$$

Ainsi, aux points racines correspondants des équations (1') et (2') (points distincts, en général), les dérivées des deux fonctions z et Y , par rapport à x , sont égales.

Supposons maintenant que, pour $x = \alpha$, Y' devienne égale à l'unité; dérivons une seconde fois la relation (2). On a

$$q''(\alpha)[\alpha'(x)]^2 + q'(\alpha).\alpha''(x) = \varphi''(q)[q'(x)]^2 + \varphi'(q).q''(x)$$

au point racine β , et, dans notre hypothèse, on a

$$\begin{aligned} q'(\alpha) &= q'(x), & q''(\alpha) &= q''(x), & \varphi''(q) &= Y''(\alpha), \\ \alpha'(\beta) &= \varphi'(q\beta) = \varphi'(\alpha) = 1. \end{aligned}$$

Il reste donc

$$\alpha''(\beta) = Q Y''(\alpha),$$

Q désignant la valeur de la dérivée de q par rapport à x , au point racine β .

D'une manière générale, supposons qu'au point racine α de l'équation (1') la dérivée première Y' soit égale à l'unité, et que les dérivées d'indices $2, 3, \dots, p-1$ soient nulles; autrement dit, que les $p-1$ premières dérivées de la fonction $\varphi x - x$ soient nulles; on aura

$$(3) \quad \alpha^{(p)}(\beta) = Q^{p-1} Y^{(p)}(\alpha).$$

En effet, dérivons p fois l'équation (2), on a

$$q^{(p)}(\alpha)[\alpha'(x)]^p + R + q'(\alpha).\alpha^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(q).[q'(x)]^p + S + \varphi'(q).q^{(p)}(x),$$

R et S désignant respectivement les ensembles de termes contenant des facteurs $\varphi^{(i)}(q), \alpha^{(i)}(x)$ avec $1 < i < p$. Au point racine β , le premier terme du premier membre et le dernier terme du second membre deviennent égaux; S est nul par hypothèse; quant à R , il s'annule si le théorème est démontré pour les valeurs $2, 3, \dots, p-1$ de p (or il est démontré pour $p=2$); il reste donc la relation

$$q'(\alpha).\alpha^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(q).[q'(x)]^p,$$

qui se réduit à (3), puisqu'au point racine β on a

$$q'(\alpha) = q'(x) \quad \text{et} \quad \varphi^{(p)}(q\beta) = \varphi^{(p)}(\alpha).$$

SÉANCE DU 17 MARS 1897.

PRÉSIDENCE DE M. PICARD.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Mehmke, présenté par MM. d'Ocagne et Humbert; M. Vitalis (Vassilas), présenté par MM. Hermite et Picard; M. Bricard, présenté par MM. Laisant et Mannheim.

Communications :

M. Touche : *Sur le mouvement des solides dans les fluides.*

MM. Borel et Picard présentent quelques observations sur ce sujet.

M. S. MANGEOT adresse la Note suivante :

Sur les conditions pour qu'une courbe plane algébrique
ait des axes en nombre donné.

Soient $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots, m_\lambda, \lambda$ nombres entiers positifs quelconques; d_2 le plus grand commun diviseur de m_1 et m_2 , d_3 celui de d_2 et m_3 , d_4 celui de d_3 et m_4 , ..., $d_{\lambda-1}$ celui de $d_{\lambda-2}$ et $m_{\lambda-1}$; $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \dots, \frac{p_{\lambda-1}}{q_{\lambda-1}}$ les avant-dernières réduites des fractions continues égales aux fractions irréductibles qui ont pour valeurs $\frac{m_1}{m_2}, \frac{d_2}{m_3}, \frac{d_3}{m_4}, \dots, \frac{d_{\lambda-1}}{m_\lambda}$, et $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots, \nu_{\lambda-1}$ les ordres respectifs de ces réduites. On peut démontrer ce résultat :

Pour que les λ équations binômes en z

$$z^{m_n} = \cos \gamma_n + i \sin \gamma_n \quad (n = 1, 2, \dots, \lambda).$$

aient des racines communes, il faut et il suffit que l'on ait, pour $n = 1, 2, \dots, \lambda$,

$$(\cos \gamma_1 + i \sin \gamma_1)^{\frac{m_n}{d_n}} = (\cos \gamma_n + i \sin \gamma_n)^{\frac{m}{d_n}};$$

et ces racines communes sont les racines de l'équation

$$z^d = \prod (\cos \gamma_n + i \sin \gamma_n)^{\frac{m}{d_n}},$$

où l'on a

$$\omega_n = p_{n-1} q_n q_{n+1} q_{n+2} \dots q_{k-1} \times (-1)^{\gamma_{n-1} + \gamma_n + \gamma_{n+1} + \dots + \gamma_{k-1} + n},$$

avec $p_0 = 1$, $\gamma_0 = 0$, $\omega_k = (-1)^{\gamma_{k-1}} p_{k-1}$.

Cela étant, je me propose de résoudre la question suivante :

Calculer les conditions pour qu'une courbe C d'ordre m, représentée, en coordonnées rectangulaires, par l'équation entière et à coefficients réels

$$f(x, y) = 0,$$

ait x axes, x étant un nombre donné, et former l'équation de ces axes ⁽¹⁾.

Je représente par

$$\sum C_m^h a_h x^{m-h} y^h + a_m y^m, \quad m \sum C_{m-1}^h b_h x^{m-h-1} y^h$$

$$(h = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

les groupes des termes de degrés m et m — 1 du polynôme $f(x, y)$.

Tout axe que peut avoir la courbe C doit être aussi un axe de la conique qui a pour équation

$$\sum C_{m-1}^h \left[\frac{\partial^{m-1} f(x, y)}{\partial x^h \partial y^{m-h-1}} \right]^2 = 0,$$

ou

$$\sum C_{m-1}^h (a_h x + a_{h+1} y + b_h)^2 = 0.$$

Si cette conique est différente d'un cercle, x ne peut être que l'un des deux nombres 1, 2: or, il est facile d'exprimer qu'un axe de cette conique est axe de la courbe C.

Je suppose que cette conique soit un cercle, et soient $x = \alpha$, $y = \beta$ les coordonnées de son centre.

Si l'on désigne par $F(x, y)$ l'un quelconque des polynômes

⁽¹⁾ Il ne s'agit ici que d'axes d'ordre pair, c'est-à-dire que de droites qui, prises pour axe des abscisses, font disparaître de l'équation de la courbe les termes de degré impair par rapport à l'ordonnée.

(Voir *Annales de l'École Normale supérieure*, janvier 1897.)

homogènes dont la somme est $f(x + \alpha, y + \beta)$, et par $Mu^k + Nv^k$ les coefficients des diverses puissances de uv dans le développement de $F[u + \alpha, i(u - v)]$, pour que la courbe C ait μ axes, et μ seulement, il est nécessaire et suffisant que toutes celles des équations binômes $Mu^k - Nv^k = 0$, dans lesquelles k n'est pas nul, équations qui sont de la forme

$$\left(\frac{u}{v}\right)^k = \cos \gamma + i \sin \gamma,$$

aient μ racines communes $\frac{n}{\nu}$, et pas davantage. En remplaçant $\frac{u}{v}$ par $\frac{x - \alpha - i(y - \beta)}{x - \alpha + i(y - \beta)}$ dans l'équation binôme qui a pour racines ces racines communes, on aura l'équation des μ axes.

De ce qui précède, je déduis la méthode suivante, pour résoudre la question proposée lorsque la conique considérée plus haut est un cercle.

Posant

$$\alpha = \frac{\sum C_{m-1}^h a_h b_h}{\sum C_{m-1}^h a_h^2}, \quad \beta = \frac{\sum C_{m-1}^h a_{h+1} b_h}{\sum C_{m-1}^h a_{h+1}^2} \quad (h = 0, 1, 2, \dots, m-1),$$

je calcule l'expression

$$\psi(k, l) = \sum_{\sigma} \frac{i\sigma}{\sigma^4 \sigma^4} \frac{\partial^{k+2l} f(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} (C_\sigma^l = C_\sigma^{l-1} C_\sigma^1 = C_\sigma^{l-2} C_\sigma^2 = C_\sigma^{l-3} C_\sigma^3 = \dots) \\ (\sigma = \pi = k + 2l),$$

en prenant k successivement égal à 1, 2, 3, ..., m , et en donnant à l successivement les valeurs 1, 2, 3, ... dont la dernière sera $\frac{m-k}{2}$ ou $\frac{m-k-1}{2}$.

Pour que la courbe C ait μ axes sans en avoir davantage, il faut et il suffit que les valeurs de l'expression $\psi(k, l)$, qui correspondent à chaque valeur de k non divisible par μ , soient toutes nulles, sans que les autres le soient toutes, et que, en désignant par $\mu m_1, \mu m_2, \dots, \mu m_n, \dots, \mu m_l$ toutes les valeurs de k multiples de μ auxquelles correspondent pour $\psi(k, l)$ des valeurs V , non nulles d'elles-mêmes, et par

$$\Lambda_{1,n} = iB_{1,n}, \quad \Lambda_{2,n} = iB_{2,n}, \quad \Lambda_{3,n} = iB_{3,n}, \quad \dots$$

celles des valeurs V , rangées dans un ordre quelconque, qui répondent à $k = \mu m_n$, on ait

$$\frac{A_{1,n}}{B_{1,n}} = \frac{A_{2,n}}{B_{2,n}} = \frac{A_{3,n}}{B_{3,n}} = \dots,$$

$$\left(\frac{A_{1,1} + i B_{1,1}}{A_{1,1} - i B_{1,1}} \right)^{\frac{m_n}{d_n}} = \left(\frac{A_{1,n} + i B_{1,n}}{A_{1,n} - i B_{1,n}} \right)^{\frac{m_1}{d_n}}$$

($n = 1, 2, 3, \dots, \lambda$).

L'équation des μ axes est

$$\left[\frac{x - \alpha + i(\gamma - \beta)}{x - \alpha - i(\gamma - \beta)} \right]^\mu = \prod \left(\frac{A_{1,n} + i B_{1,n}}{A_{1,n} - i B_{1,n}} \right)^{\omega_n}.$$

Les nombres $d_n, \omega_n, p_n, q_n, r_n$ sont définis comme plus haut, en partant des nombres $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots, m_\lambda$ (les exposants $\frac{m_1}{d_n}, \frac{m_n}{d_n}$ sont entiers).

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES AVEC SECOND MEMBRE;

Par M. GRÉVY.

1. L'équation fonctionnelle

$$p_0(z)f(z) + p_1(z)f(z_1) + \dots + p_n(z)f(z_n) = 0,$$

dans laquelle les coefficients $p_i(z)$ sont holomorphes dans le domaine d'un point limite x pour la substitution $z_{i+1} = \varphi(z_i)$, admet des solutions dont la forme, au point limite, dépend de l'équation caractéristique ⁽¹⁾

$$p_0(x) + p_1(x)t + \dots + p_n(x)t_n = 0.$$

En particulier, si cette équation admet la racine simple 1, et n'admet aucune racine de la forme $[\varphi'(x)]^m$, m étant entier, positif, l'équation fonctionnelle a une solution holomorphe dans le

⁽¹⁾ *Annales de l'École Normale supérieure*, 1891, p. 267.

domaine du point x et non nulle en ce point; cette fonction est définie à un facteur constant près.

2. Ces résultats rappelés, considérons l'équation fonctionnelle avec second membre

$$(1) \quad p_0(z)f(z) + p_1(z)f(z_1) + \dots + p_n(z)f(z_n) = q(z),$$

dans laquelle $p_0(z), \dots, p_n(z), q(z)$ sont des fonctions holomorphes dans le domaine du point x , $p_0(x)$ et $p_n(x)$ étant différents de zéro.

Soient $f(z), f'(z)$ deux solutions de l'équation (1) avec second membre; leur différence vérifiant l'équation sans second membre

$$p_0(z)[f'(z) - f(z)] + p_1(z)[f'(z_1) - f(z_1)] + \dots + p_n(z)[f'(z_n) - f(z_n)] = 0,$$

la solution générale de l'équation (1) se déduira de la solution générale de l'équation sans second membre par l'addition d'une solution particulière de l'équation (1); pour obtenir une telle solution, faisons sur l'équation (1) la substitution $z, \varphi(z)$:

$$(2) \quad p_0(z_1)f(z_1) + p_1(z_1)f(z_2) + \dots + p_n(z_1)f(z_{n+1}) = q(z_1).$$

Multipliant l'équation (1) par $q(z_1)$ et l'équation (2) par $q(z)$, et retranchant, il vient

$$(3) \quad \begin{cases} q(z_1)p_0(z)f(z) + [q(z_1)p_1(z) - q(z)p_0(z_1)]f(z_1) + \dots \\ + [q(z_1)p_n(z) - q(z)p_{n-1}(z_1)]f(z_n) - q(z)p_n(z_1)f(z_{n+1}) = 0, \end{cases}$$

équation d'ordre $n+1$ sans second membre, que doit vérifier la fonction $f(z)$.

3. $q(x) \neq 0$. L'équation caractéristique est alors

$$p_0(x) + [p_1(x) - p_0(x)]t + \dots + [p_n(x) - p_{n-1}(x)]t^n - p_n(x)t^{n+1} = 0$$

ou

$$(1-t)[p_0(x) + p_1(x)t + \dots + p_n(x)t^n] = 0.$$

Cette équation admet la racine 1 et les racines de l'équation caractéristique relative à l'équation fonctionnelle obtenue en supprimant le second membre de l'équation (1).

Si l'on suppose que cette équation caractéristique n'admet ni la racine 1, ni une racine $[\varphi'(x)]^m$, m entier positif, $[\varphi'(x)]$ étant différent de zéro, l'équation fonctionnelle (3) a une solution holomorphe non nulle au point x ; soit $f(z)$; nous allons voir que cette solution vérifie l'équation (1).

Désignant, pour abrégé, par $F(z)$ le premier membre de (1), l'équation (3) est

$$F(z) q(z_1) - F(z_1) q(z) = 0$$

ou

$$\frac{F(z_1)}{q(z_1)} = \frac{F(z)}{q(z)},$$

équation fonctionnelle relative à $\frac{F(z)}{q(z)}$, qui n'a pas de solution holomorphe dans le domaine du point x , si ce n'est une constante; comme la solution $f(z)$ considérée est holomorphe, il en est de même de $F(z)$; on doit avoir

$$F(z) = kq(z),$$

k étant une constante arbitraire.

La valeur de $f(z)$ étant définie à un facteur constant près, on peut le choisir de façon que cette fonction vérifie l'équation (1)

$$F(z) = q(z);$$

$f(z)$ est donc bien une solution particulière de (1).

4. La détermination du facteur qui entre dans $f(z)$ n'est plus possible si 1 est solution de l'équation caractéristique

$$p_0(x) + p_1(x)t + \dots + p_n(x)t^n = 0,$$

le premier membre de l'équation fonctionnelle (1) étant nul au point x , sans que le second membre le soit; supposons que 1 soit racine d'ordre α de l'équation caractéristique; nous pouvons employer le même procédé que pour l'équation sans second membre (1).

Soit Y une solution de l'équation sans second membre, cette solution étant holomorphe et non nulle en x , correspondant à la

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1894, p. 278.

racine 1 de l'équation caractéristique; posons

$$f(z) = YV.$$

L'équation (1) devient

$$p_0(z) YV + p_1(z) Y_1 V_1 + \dots + p_n(z) Y_n V_n = q(z),$$

$Y_1, Y_2, \dots; V_1, V_2, \dots$ étant les transformées de Y et V par la substitution $[z, \varphi(z)]$.

Tenant compte de la relation

$$p_0(z) Y + p_1(z) Y_1 + \dots + p_n(z) Y_n = 0,$$

et, prenant pour fonction inconnue

$$V_1 - V = U,$$

on a

$$\begin{aligned} p_0 Y U &= (p_0 Y - p_1 Y_1) U_1 + \dots \\ &= (p_0 Y + p_1 Y_1 + \dots + p_{n-1} Y_{n-1}) U_{n-1} = -q(z), \end{aligned}$$

équation de même forme que l'équation (1), mais dont l'équation caractéristique ne renferme la racine 1 qu'à l'ordre $\alpha - 1$.

Si l'on répète les mêmes transformations, on trouvera finalement une équation fonctionnelle

$$P_0(z) T(z) + P_1(z) T(z_1) + \dots + P_{n-\alpha} T(z_{n-\alpha}) = q(z),$$

dont l'équation caractéristique n'admet plus la racine 1 et admet toutes les autres racines de l'équation caractéristique primitive; l'équation fonctionnelle en $T(z)$ a donc une solution non nulle au point x et holomorphe dans le domaine de ce point.

De cette solution, on déduit pour l'équation (1) une solution de la forme

$$Y[kb^x(z) + \lambda_1(z) b^{x-1}(z) + \dots + \lambda_{\alpha}(z)],$$

Y étant une fonction holomorphe dans le domaine du point x et non nulle en ce point, k étant une constante différente de zéro et $\lambda_1(z), \dots, \lambda_{\alpha}(z)$ des fonctions holomorphes dans le domaine du point x .

Ces résultats subsistent si $\varphi'(x) = 0$; il suffit de remplacer $b(z)$ par $c(z)$.

5. Il reste à examiner le cas où, $\varphi'(x)$ étant différent de zéro, l'équation caractéristique admet des solutions de la forme $\varphi'(x)^m$ (m entier positif); pour simplifier, je supposerai qu'il n'existe que deux telles racines $[\varphi'(x)]^{m_1}$, $[\varphi'(x)]^{m_2}$, ($m_1 > m_2$).

Si l'on pose

$$f(z) = [B(z)]^{m_1} Y,$$

l'équation (1) devient

$$[B(z)]^{m_1} \{ p_0(z) Y + p_1(z) [\varphi'(x)]^{m_1} Y_1 + \dots + p_n(z) [\varphi'(x)]^{nm_1} Y_n \} = q(z).$$

L'équation caractéristique

$$p_0(x) + p_1(x) [\varphi'(x)]^{m_1} t + \dots + p_n(x) [\varphi'(x)]^{nm_1} t^n = 0$$

a les racines $[\varphi'(x)]^{m_2 - m_1}$ et 1.

A la racine 1 correspond, pour l'équation fonctionnelle

$$p_0(z) Y + \dots + p_n(z) [\varphi'(x)]^{nm_1} Y_n = 0,$$

une solution holomorphe non nulle au point x : soit Y' .

Si l'on pose

$$Y = Y' U, \quad U_1 = Y = U,$$

l'équation (1) prend la forme

$$[B(z)]^{m_1} [p'_0(z) U + p'_1(z) U_1 + \dots + p'_{n-1}(z) U_{n-1}] = q(z),$$

l'équation caractéristique

$$p'_0(x) + p'_1(x) t + \dots + p'_{n-1}(x) t^{n-1} = 0$$

n'ayant plus la racine 1, mais ayant la racine $[\varphi'(x)]^{m_2 - m_1}$.

Posons

$$U = [B(z)]^{m_2 - m_1} T,$$

il vient

$$[B(z)]^{m_1 + m_2 - m_1} \{ p'_0 \cdot T + p'_1 [\varphi'(x)]^{m_2 - m_1} T_1 + \dots + p'_{n-1} [\varphi'(x)]^{(n-1)(m_2 - m_1)} T_{n-1} \} = q(z).$$

L'équation, obtenue en égalant à zéro la quantité entre crochets, a une solution holomorphe, non nulle en x , car son équation caractéristique a la racine 1; soit T' .

Posant

$$T = T' R, \quad R_1 = R = S,$$

on forme une équation

$$[B(z)]^{m_2} [p_0'' S + p_1'' S_1 + \dots + p_{n-2}'' S_{n-2}] = q(z),$$

l'équation caractéristique de la quantité entre crochets n'ayant plus la racine 1.

Pour ramener cette équation au type étudié au début, il suffit de prendre pour nouvelle fonction inconnue

$$S = S' [B(z)]^{-m_2}.$$

Il existera alors une solution S' holomorphe en x et non nulle.

A la solution

$$S = S' B^{-m_2},$$

correspondent

$$R = \frac{P(z)}{(z-x)^{m_2}} + \alpha b(z), \quad T = \frac{P'(z)}{(z-x)^{m_2}} + Q(z) b(z),$$

$P'(z)$ étant holomorphe et non nulle en x , $Q(z)$ étant holomorphe en x .

On a de même

$$\begin{aligned} U &= \frac{P''(z)}{(z-x)^{m_1}} + \frac{Q'(z) b(z)}{(z-x)^{m_1-m_2}}, \\ Y &= \frac{P'''(z)}{(z-x)^{m_1}} + \frac{P_1(z) b(z)}{(z-x)^{m_1-m_2}} + Q''(z) b^2(z), \\ f(z) &= F_1(z) (z-x)^{m_1} b^2(z) + F_2(z) (z-x)^{m_2} b(z) + F_3(z), \end{aligned}$$

F_1, F_2, F_3 étant des fonctions holomorphes au point x .

Ce qui précède suffit pour montrer la forme de cette solution particulière dans le cas général; le résultat concorde avec celui qui a été trouvé pour les équations sans second membre; on peut résumer ces résultats comme il suit :

L'équation fonctionnelle avec second membre non nul au point limite a une solution de la forme

$$f_0(z) + (z-x)^{m_1} f_1(z) b(z) + \dots + (z-x)^{m_n} f_n(z) b^n,$$

$f_0, f_1, \dots, f_n$ étant des fonctions holomorphes dans le domaine du point limite, $m_1, \dots, m_n$ étant les exposants des puissances de $\varphi'(x)$, qui sont solutions de l'équation caractéristique, plusieurs de ces quantités pouvant être égales.

6. Le cas de $q(x) = 0$ se ramène au précédent: supposons que x soit racine d'ordre k ; si l'on pose

$$f(z) = [B(z)]^k Y,$$

on a

$$\begin{aligned} [B(z)]^k \{ p_0 Y + p_1 [\varphi'(x)]^k Y_1 + \dots + p_n [\varphi'(x)]^{nk} Y_n \} &= q(z); \\ p_0 Y + p_1 [\varphi'(x)]^k Y_1 + \dots + p_n [\varphi'(x)]^{nk} Y_n &= \frac{q(z)}{[B(z)]^k}. \end{aligned}$$

Cette dernière équation est du type étudié plus haut; son équation caractéristique se déduit de l'équation caractéristique primitive par la multiplication des racines par $\frac{1}{[\varphi'(x)]^k}$.

7. La même transformation permet d'étudier les équations pour lesquelles $q(z)$ n'est pas holomorphe au point x , mais est de la forme

$$(z - x)^\alpha \theta(z),$$

α étant quelconque et $\theta(z)$ une fonction holomorphe; il suffit de remarquer que le quotient

$$\frac{q(z)}{[B(z)]^\alpha}$$

est une fonction holomorphe dans un domaine du point x , qui ne renferme aucun zéro de $q(z)$ ou de $B(z)$.

8. Remarquons que la marche que nous avons suivie montre que la connaissance d'une solution d'une équation sans second membre permet d'abaisser l'ordre de l'équation avec second membre.

SUR L'ÉQUATION LINÉAIRE AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE;

Par M. J. LE ROUX.

1. M. Bendixson a publié, dans le *Bulletin de la Société Mathématique*, une élégante Note sur l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} f(x, y) = 0.$$

Cette Note m'a remis en mémoire quelques remarques relatives

à ce type d'équations, que je demande la permission d'exposer succinctement.

Considérons l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Supposons qu'on ait intégré l'équation des caractéristiques

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Par tout point du plan [dans le domaine où $f(x, y)$ satisfait aux conditions d'intégrabilité de l'équation (2)], il passe une caractéristique et, en général, une seule. La caractéristique qui passe au point (x_0, y_0) peut être représentée, suivant la notation de M. Bendixson, par

$$(3) \quad y = \psi(x, x_0, y_0).$$

Il s'agit maintenant d'intégrer l'équation (1), de manière que l'intégrale prenne des valeurs données sur une courbe C. Le problème de l'intégration consiste : 1° à donner le moyen de calculer la valeur que prend en un point arbitraire M du plan l'intégrale z qui satisfait aux conditions initiales indiquées ; 2° à déterminer les singularités de cette intégrale et les limites du domaine où elle se trouve définie.

Or, ce problème est ici immédiatement résolu. En effet, l'identité

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial y} dx \left[\frac{dy}{dx} + f(x, y) \right]$$

montre que, lorsqu'on se déplace sur une caractéristique, on a $dz = 0$; par suite, z conserve la même valeur en tous les points d'une même caractéristique.

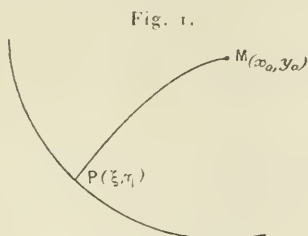
Cela posé, considérons la caractéristique du point M (x_0, y_0) , définie par l'équation (3). Elle rencontre la courbe (C) (*fig. 1*) en un point P (ξ, η) . On a, d'après la remarque précédente,

$$(4) \quad z(x_0, y_0) = z(\xi, \eta),$$

ou bien, d'après l'équation (3), qui donne $\eta = \psi(\xi, x_0, y_0)$:

$$(5) \quad z(x_0, y_0) = z\left[\xi, \psi(\xi, x_0, y_0)\right].$$

Supposons que la courbe (C) soit une parallèle à OY, $x = \xi$; alors ξ désigne une constante déterminée dans l'équation (5) et $z(\xi, \eta)$ une fonction connue de η . L'équation (5) détermine donc



complètement la valeur de l'intégrale. Si la valeur initiale de l'intégrale, $z(\xi, \eta_1)$, se réduit à η_1 , on trouve l'intégrale particulière signalée par M. Bendixson,

$$z(x_0, y_0) = \psi(\xi, x_0, y_0).$$

En résumé, pour calculer la valeur de l'intégrale en M, il faut d'abord déterminer la caractéristique de ce point et trouver ensuite son intersection avec la courbe (C). Pour que l'intégrale existe en M, il faut donc : 1° que la caractéristique existe en ce point ; 2° que cette caractéristique rencontre la courbe (C), sur laquelle on donne les valeurs initiales de l'intégrale. Le nombre des valeurs de z est, en général, égal au nombre des points d'intersection. Cette intégrale se présente, par conséquent, comme une fonction multiforme. Les lignes de passage d'une détermination à une autre (lignes de ramification) sont les caractéristiques tangentes à la courbe C.

Considérons, par exemple, l'équation

$$(6) \quad x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

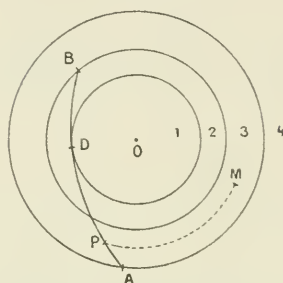
Les caractéristiques sont des cercles concentriques.

Supposons qu'on donne les valeurs de z sur un arc de courbe AB (fig. 2). Traçons les cercles caractéristiques passant aux extrémités de l'arc et le cercle caractéristique tangent en D à AB. Ces trois cercles partagent le plan en quatre régions, numérotées sur la figure 1, 2, 3, 4. Dans les régions 1 et 4 l'intégrale n'existe pas :

dans la région 2, elle admet deux valeurs distinctes en général, et dans la région 3 une seule valeur.

Le calcul de la valeur de l'intégrale en un point M de l'une de

Fig. 2.



ces régions est équivalent à ce problème courant de Géométrie descriptive : *Placer un point sur une surface de révolution d'axe vertical.*

Les caractéristiques limites du domaine d'existence de l'intégrale et les caractéristiques de ramification sont constituées par les lignes de contour apparent horizontal.

2. Ces considérations s'appliquent également aux équations linéaires à second membre.

Soit à résoudre

$$(7) \quad \frac{\partial z}{\partial x} - a \frac{\partial z}{\partial y} = F(x, y).$$

Désignons par λ une intégrale de l'équation

$$(7') \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x} - a \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0,$$

et prenons comme nouvelles variables x et λ . L'équation (7) devient

$$(8) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = F(x, y)_\lambda,$$

en désignant par $F(x, y)_\lambda$ ce que devient $F(x, y)$ quand on y remplace y par sa valeur en fonction de x et de λ .

On a donc (fig. 1)

$$z^u = z_{P^u} + \int_P^{P^u} F(x, y)_\lambda dx$$

L'intégrale $\int_p^M F(x, y)_\lambda dx$ est prise en supposant λ constant, c'est-à-dire en remplaçant y par une fonction de x , telle que le point (x, y) décrive la caractéristique PM. La valeur de cette intégrale est d'ailleurs indépendante du choix de l'intégrale particulière λ de l'équation (7') et, par suite, de la valeur numérique de λ . Elle ne dépend que de la position géométrique de la caractéristique d'intégration PM.

3. Les fonctions z étudiées dans les développements précédents peuvent être déterminées lorsqu'on connaît les caractéristiques et les valeurs initiales; mais, pour qu'elles soient réellement des intégrales de l'équation considérée, il faut qu'elles admettent des dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y . M. Bendixson a démontré que l'intégrale déjà signalée

$$z(x, y) = \psi(\xi, x, y)$$

admet ces dérivées et satisfait à l'équation (1). Il est d'ailleurs facile de démontrer que l'existence de l'une des dérivées entraîne celle de l'autre. En effet, l'équation

$$(3) \quad y = \psi(x, x_0, y_0)$$

exprime que le point (x, y) est situé sur la caractéristique passant au point (x_0, y_0) . Mais, à cause de la détermination univoque des caractéristiques dans le domaine où nous nous plaçons, cette même courbe pourra être définie par la condition de passer au point (x, y) . De sorte qu'on peut regarder comme coordonnées courantes soit (x, y) , soit (x_0, y_0) . Prenons comme variables (x_0, y_0) et regardons x et y comme des constantes. Sur la caractéristique (3) nous aurons constamment

$$(9) \quad \frac{dy_0}{dx_0} = f(x_0, y_0).$$

Mais nous avons aussi, pour tout déplacement situé sur la caractéristique,

$$\psi(x, x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0) - \psi(x, x_0, y_0) = 0,$$

ou bien

$$\begin{aligned} & \frac{\psi(x, x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0) - \psi(x, x_0, y_0 + \Delta y_0)}{\Delta x_0} \Delta x_0 \\ & + \frac{\psi(x, x_0, y_0 + \Delta y_0) - \psi(x, x_0, y_0)}{\Delta y_0} \Delta y_0 = 0. \end{aligned}$$

Or $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$ tend vers une limite déterminée lorsque Δx_0 tend vers zéro ; si, d'autre part, la dérivée de ψ par rapport à x_0 existe et qu'elle soit une fonction continue de y_0 , le rapport

$$\frac{\psi(x, x_0, y_0 + \Delta y_0) - \psi(x, x_0, y_0)}{\Delta y_0},$$

qui est indépendant de Δx_0 , tendra aussi vers une limite déterminée lorsque Δy_0 tendra vers zéro.

Nous aurons, de plus, d'après l'équation (9),

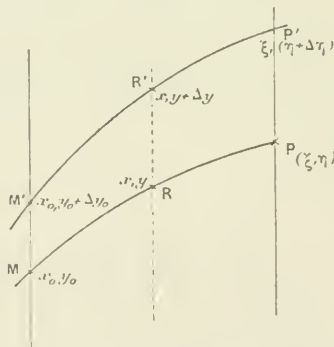
$$\psi'_{x_0} + f(x_0, y_0)\psi'_{y_0} = 0.$$

Donc l'existence d'une dérivée continue relative à un déplacement extérieur à la caractéristique entraîne l'existence d'une dérivée relative à un déplacement quelconque, et la fonction ψ est une intégrale de l'équation (1).

Il ne reste plus qu'à démontrer l'existence d'une dérivée, par exemple de $\frac{\partial \psi}{\partial y_0}$. Les mêmes considérations géométriques nous conduiront facilement à l'élégante formule de M. Bendixson.

Considérons les caractéristiques des deux points $M(x_0, y_0)$ et $M'(x_0, y_0 + \Delta y_0)$; elles rencontrent la droite $x = \xi$ (fig. 3) aux points $P(\xi, \eta)$ et $P'(\xi, \eta + \Delta \eta)$. Je dis que η est une fonction con-

Fig. 3.



tinue de y_0 dans le domaine D où nous nous plaçons si les conditions suivantes sont vérifiées : 1° en tout point du domaine il passe une seule caractéristique bien déterminée, sans points sin-

gulières ni tangentes parallèles à OY ; 2° les arcs de caractéristiques $MP, MP', \dots$ ne sortent point de ce domaine. Donnons-nous un nombre $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que les caractéristiques des points $(\xi, \eta - \varepsilon)$ et $(\xi, \eta + \varepsilon)$ puissent rencontrer la droite $x = x_0$ sans sortir du domaine D ; comme deux arcs de caractéristiques ne peuvent pas se traverser dans ce domaine, il en résulte que la première (celle du point $\xi, \eta - \varepsilon$) est située tout entière au-dessous de MP , et la seconde tout entière au-dessus. Soient $y_0 - \alpha$ et $y_0 + \beta$ les ordonnées des points où elles rencontrent la droite $x = x_0$; l'inégalité

$$-\alpha < \Delta y_0 < \beta$$

entraînera

$$-\varepsilon < \Delta \eta < \varepsilon,$$

ce qui démontre la continuité. Cela posé, considérons deux courbes dont nous désignerons par Y et y les ordonnées qui correspondent à une même valeur de x . On a évidemment

$$Y - y = Y_0 - y_0 + \int_{x_0}^x \left(\frac{dY}{dx} - \frac{dy}{dx} \right) dx.$$

Appliquons cette remarque aux deux caractéristiques MP et MP' ; nous aurons

$$\frac{\Delta \eta}{\Delta y_0} - 1 = \int_{x_0}^{\xi} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta y_0} dx.$$

Dans cette formule y et $y + \Delta y$ désignent les ordonnées des deux courbes MP et MP'

$$y = \psi(x, x_0, y_0) \quad y + \Delta y = \psi(x, x_0, y_0 + \Delta y_0).$$

La fonction

$$\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta y_0}$$

étant une fonction continue de x dans l'intervalle de x_0 à ξ , on a

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\Delta \eta}{\Delta y_0} \right) = \frac{f(\xi, \eta + \Delta \eta) - f(\xi, \eta)}{\Delta \eta} \frac{\Delta \eta}{\Delta y_0},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\Delta \eta}{\Delta y_0} = e^{\int_{x_0}^{\xi} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta y_0} dx}.$$

Si donc $f(x, y)$ admet une dérivée continue par rapport à y , on aura

$$\frac{dr_1}{dy_0} = e^{\int_{x_0}^{\xi} f'_y(x, y) dx},$$

l'intégrale étant prise suivant la caractéristique.

Considérons maintenant la fonction $z(x_0, y_0)$ définie par l'équation (5), et supposons qu'on la détermine par la condition de se réduire à $F(r_1)$ pour $x = \xi$. On a alors

$$z(x_0, y_0) = F[\psi(\xi, x_0, y_0)].$$

Si la dérivée $\frac{dF}{dr_1}$ existe, il en sera de même des dérivées

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_0} &= \frac{dF}{dr_1} \frac{dr_1}{dx_0}, \\ \frac{\partial z}{\partial y_0} &= \frac{dF}{dr_1} \frac{dr_1}{dy_0} \quad [r_1 = \psi(\xi, x_0, y_0)], \end{aligned}$$

qui satisferont à l'équation (1).

L'équation avec second membre (7) nous fournit des résultats analogues.

Considérons l'expression

$$u = \int_{x_0}^x F(x, y) dx.$$

Désignons par $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$ les dérivées prises en regardant x et y comme variables indépendantes; par $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ les dérivées obtenues en prenant comme variables x et y .

On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \left(\frac{F'_y}{\lambda'_y} \right) dx.$$

L'intégrale

$$\int_{x_0}^x \left(\frac{F'_y}{\lambda'_y} \right) dx$$

aura une valeur bien déterminée si F'_y et λ'_y sont des fonctions continues, la seconde étant différente de zéro sur la courbe d'intégration, ce qui suppose que la caractéristique n'a pas de tangentes parallèles à Ox . Dans cette hypothèse, les dérivées $\frac{du}{dx}$

et $\frac{du}{dy}$ ont pour expressions

$$\frac{du}{dx} = F(x, y) + \lambda'_x \int_{x_0}^x \left(\frac{F'_y}{\lambda'_y} \right) dx,$$

$$\frac{du}{dy} = \lambda'_y \int_{x_0}^x \left(\frac{F'_y}{\lambda'_y} \right) dx.$$

La fonction u est l'intégrale particulière de l'équation (7) qui s'annule sur la droite $x = x_0$.

SUR CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR ANALOGUES A L'ÉQUATION DE CLAIRAUT:

Par M. L. RAFFY.

Après avoir fait connaître (*Bull. de la Soc. mathém. de France*, t. XXIII, p. 57 et suiv.) une classe étendue d'équations du premier ordre qu'on intègre, à la façon des équations de Clairaut, en y remplaçant la dérivée par une constante arbitraire, j'ai remarqué (*ibid.*, p. 63) qu'une propriété analogue appartient à l'équation linéaire

$$\varphi \equiv y - xy' + \frac{x^2}{2!}y'' - \dots + (-1)^m \frac{x^m}{m!}y^{(m)} = 0,$$

puisque son intégrale générale est

$$y - C_1x + \frac{C_2}{2!}x^2 - \dots + (-1)^m \frac{C_m}{m!}x^m = 0.$$

Je me propose actuellement de retrouver et d'étendre ce résultat. Considérons, à cet effet, l'expression différentielle φ et formons ses dérivées successives, en traitant $y, y', \dots, y^{(m)}$ comme des constantes. Je dis d'abord que l'équation différentielle

$$(1) \quad y - xy' + \frac{x^2}{2!}y'' - \dots + (-1)^m \frac{x^m}{m!}y^{(m)} = F \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m} \right)$$

où F est une fonction arbitraire, a pour intégrale générale

$$(2) \quad y - C_1x + \frac{C_2}{2!}x^2 - \dots + (-1)^m \frac{C_m}{m!}x^m = F(C_1, C_2, \dots, C_m).$$

En différentiant l'équation (1), on trouve un résultat de la forme

$$y^{m+1} \Psi(x, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0,$$

ce qui est une analogie avec l'équation de Clairaut. D'après cela, posons

$$y = C_0 - C_1 x + \frac{C_2}{2!} x^2 - \dots + (-1)^m \frac{C_m}{m!} x^m.$$

L'application répétée de la formule de Taylor à ce polynôme donne

$$\frac{\partial^r y}{\partial x^r} = (-1)^r y^{(r)}(x-x) = (-1)^r y^{(r)}(0) = C_r \\ (r = 1, 2, \dots, m).$$

Substituant ces expressions dans l'équation (1), on trouve

$$C_0 = F(C_1, C_2, \dots, C_m),$$

ce qui démontre la proposition. Mais il y a plus. L'identité

$$y = y(0) - y(x-x) = y(x) - x \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{x^2}{2!} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dots + (-1)^m \frac{x^m}{m!} \frac{\partial^m y}{\partial x^m}$$

donne visiblement

$$y(x) = y - x \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{x^2}{2!} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dots + (-1)^m \frac{x^m}{m!} \frac{\partial^m y}{\partial x^m}.$$

Si donc on écrit l'équation (1) sous la forme

$$\Phi\left(\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^m y}{\partial x^m}\right) = F\left(\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^m y}{\partial x^m}\right),$$

on voit, par comparaison avec la relation (2), qu'on obtient son intégrale générale

$$\Phi(C_1, C_2, \dots, C_m) = F(C_1, C_2, \dots, C_m)$$

en y remplaçant les dérivées successives de y par des constantes arbitraires.

Ainsi se trouve généralisée la propriété des équations de Clairaut.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 7 AVRIL 1897.

PRÉSIDENTE DE M. PICARD.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur les surfaces gauches circonscrites à une surface donnée le long d'une courbe donnée.*

M. d'Ocagne : *Remarque sur l'inversion.*

M. Lecornu : *Sur le frottement dans les engrenages.*

M. PICARD donne lecture de la préface qu'il a écrite pour l'édition des *Œuvres de Galois*, qui va prochainement paraître sous les auspices de la Société.

M. DUMONT adresse un Mémoire : *Sur les surfaces du troisième ordre, qui sont polaires réciproques d'elles-mêmes par rapport à une quadrique.*

SÉANCE DU 23 AVRIL 1897.

PRÉSIDENTE DE M. PICARD.

Communications :

M. Bioche : *Propriétés des surfaces algébriques passant par une courbe gauche et admettant cette courbe comme ligne asymptotique.*

M. Mannheim : *A propos d'un théorème connu de Géométrie.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE QUI SONT POLAIRES D'ELLES-MÊMES PAR RAPPORT A UNE QUADRIQUE:

Par M. F. DUMONT.

Si l'on considère le tableau des vingt-trois classes de surfaces du troisième ordre (*voir* SALMON, *Géométrie analytique*, traduction Chemin), on voit que les seules surfaces à la fois de troisième ordre et de troisième classe sont : 1° les surfaces à trois binodes B_3 ⁽¹⁾ (notation Salmon); 2° les surfaces réglées.

Ces deux classes de surfaces sont donc les seules contenant des surfaces susceptibles de se reproduire elles-mêmes par une transformation dualistique. Considérons-les successivement.

1° Surfaces à trois binodes B_3 .

Les trois biplans ont pour arêtes trois droites concourantes; soient BA, B'A, B''A ces trois droites, B, B', B'' étant les trois binodes. Dans la figure transformée, chaque binode B a pour transformé un plan b , tel que toutes les tangentes qu'il contient passent par deux points P' , P'' transformés des plans p' , p'' du biplan relatif à B.

Les trois biplans ont deux à deux une face commune, donc les trois couples de points analogues à (P', P'') ont deux à deux un point commun, c'est-à-dire que ces points P sont au nombre de trois seulement transformés des trois plans BAB', B'AB'', B''AB et qu'ils sont dans un même plan a transformé de A.

En résumé, la surface transformée possède trois points par chacun desquels passent une infinité de tangentes situées dans deux plans; les trois couples de plans se réduisent à trois plans. La surface a donc trois binodes comme la proposée, ce qui pouvait être affirmé *a priori*.

(1) On rappellera ici que les binodes B sont les points doubles, dont le cône tangent est dégénéré en deux plans dont l'ensemble constitue ce que l'on appelle le *biplan*, l'arête du biplan n'étant pas située sur la surface.

Prenons, pour tétraèdre de référence, le tétraèdre $BB'B''A$, l'équation de la surface du troisième ordre considérée a la forme

$$(1) \quad xyzt - m\mathfrak{z}^3 = 0.$$

Pour que la polaire réciproque de (1) par rapport à une quadrique puisse coïncider avec (1), il faut d'abord que le tétraèdre soit autopolaire par rapport à cette quadrique. Ainsi la quadrique doit avoir une équation de la forme

$$(2) \quad p x^2 + q y^2 + r \mathfrak{z}^2 + st^2 = 0.$$

En cherchant l'équation de la polaire réciproque de (1) par rapport à (2), on trouve

$$(3) \quad xyz = \frac{r^3}{27mpqs} \mathfrak{z}^3 = 0.$$

Donc, si l'on a la condition

$$(4) \quad \frac{r^3}{27pq\mathfrak{s}} = -m^2,$$

les surfaces (1) et (3) coïncident. Ainsi, pour une surface (1) donnée, on peut trouver une double infinité de quadriques par rapport auxquelles la surface (1) est autopolaire. Si la donnée est la quadrique (2) directrice de la transformation, à chaque tétraèdre autopolaire par rapport à cette quadrique correspondent deux surfaces cubiques autopolaires par rapport à la même quadrique (correspondant à deux valeurs égales et de signes contraires de m).

2° Surfaces réglées.

Les surfaces réglées cubiques sont réparties dans deux classes : 1° les surfaces à deux directrices rectilignes, l'une droite double, l'autre droite simple de la surface ; 2° les surfaces à une directrice rectiligne droite double, mais sans directrice simple (surfaces de Cayley).

Considérons les surfaces à deux directrices et supposons ces directrices l'une et l'autre à distance finie.

Ces deux directrices sont interverties par la transformation. En effet, soient d la directrice double, s la directrice simple, a et b deux génératrices coupant d au même point M , et s aux points A et B . Le plan MAB , contenant MA , MB et la directrice simple, se

transforme en un point par lequel passent les transformées de MA, de MB et de s , lesquelles transformées forment un trièdre puisque les trois premières droites forment un triangle. Au contraire, le trièdre (d, a, b) a pour transformé un triangle dont un côté est fixe; savoir la transformée s' de d . La surface transformée a donc deux directrices dont l'une s' transformée de d est droite simple, et l'autre d' transformée de s est droite double.

Prenons la directrice double d pour arête $X=Y=0$ du tétraèdre de référence, la directrice simple s pour l'arête opposée $Z=T=0$, et, en outre, deux génératrices de la surface, ne coupant pas d au même point, pour arêtes opposées $X=Z=0$ et $Y=T=0$; l'équation de la surface proposée sera de la forme

$$(1) \quad By^2z - Cx^2t + 2Exyz - 2Fxyt = 0.$$

Prenons pour quadrique directrice de la transformation

$$(2) \quad mx^2 + ny^2 + pz^2 - qt^2 = 0.$$

L'équation de la surface polaire réciproque de (1) par rapport à (2) s'obtiendra en éliminant x_0, y_0, z_0, t_0 entre les équations

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{2Cx_0t_0 + 2Ey_0z_0 + 2Fy_0t_0}{mx} = \frac{2By_0z_0 + 2Ex_0z_0 + 2Fx_0t_0}{ny} \\ \quad \quad \quad = \frac{By_0^2 + 2Ex_0y_0}{pz} = \frac{Cx_0^2 + 2Fy_0x_0}{qt} \end{cases}$$

et

$$mx_0x + ny_0y - pz_0z + qt_0t = 0.$$

Éliminant d'abord t_0 et z_0 , on arrive à l'équation

$$(mx_0x + ny_0y)(CEx_0^2 - BFy_0^2 + BCx_0y_0) = 0,$$

c'est-à-dire à

$$(4) \quad CEx_0^2 + BFy_0^2 - BCx_0y_0 = 0$$

ou

$$(5) \quad mx_0x + ny_0y = 0.$$

Les deux derniers rapports (3) donnent une équation en x_0 et y_0 .

L'élimination de $\frac{x_0}{y_0}$ entre cette équation et (4) donne une équation

tion indépendante de m, n , qui n'est pas celle de la surface cherchée. L'élimination entre cette même équation et (5) donne

$$(6) \quad Cpn^2y^2z = Bqm^2x^2t + 2Fpmnxyz - 2Eqmnxyt = 0,$$

équation de la même forme que (1).

Pour que les équations (1) et (6) représentent la même surface, il faut que les conditions suivantes soient remplies :

$$\frac{Cpn^2}{B} = -\frac{Bqm^2}{C} = \frac{E}{Fpmn} = -\frac{F}{Eqmn},$$

c'est-à-dire

$$\frac{p}{q} = -\frac{E^2}{F^2}, \quad \frac{m}{n} = \frac{CE}{BF}.$$

La surface directrice a donc pour équation

$$CEx^2 + BFy^2 + K(E^2z^2 - F^2t^2) = 0,$$

K étant un paramètre arbitraire.

Considérons maintenant les surfaces réglées à plan directeur, pour lesquelles c'est la directrice simple qui est supposée transportée à l'infini. Prenons, en coordonnées cartésiennes, la directrice double, pour Oz , une des génératrices pour Ox , le plan de cette génératrice et de la directrice simple pour plan $z=0$, le plan passant par Oz qui contient celle des génératrices qui est à l'infini, pour $y=0$, l'équation de la surface est

$$(1') \quad by^2z + 2exyz + Cx^2 + 2fxy = 0.$$

Un calcul analogue au précédent montre que la transformée par rapport à la quadrique

$$Cex^2 + bfy^2 + Ke^2z^2 = Kf^2$$

coïncide avec la surface.

Considérons en troisième lieu les surfaces à plan directeur pour lesquelles la directrice double est à l'infini. Leur équation peut se ramener à la forme

$$(1'') \quad az^2y + 2gzy + 2hzy + dx = 0,$$

et l'on trouve encore, par un calcul analogue, l'équation de la quadrique directrice de la transformation.

Si l'on considère maintenant une surface de Cayley, dont l'équation peut, comme, comme on sait, se réduire à

$$x^3 + 3y(2lx + hyz) = 0$$

(en prenant la droite double pour axe $x = y = 0$ et celui des deux plans tangents passant par cette droite, qui est fixe, pour plan $z = 0$), on voit que la droite double d étant la seule droite de la surface, autre que les génératrices, il faut, si la surface est autopolaire, que d soit ou bien sa propre transformée, ou bien celle d'une génératrice g . Or, cette dernière hypothèse est à rejeter, car toute autre génératrice g' aura une transformée g'_1 rencontrant g , puisque g' coupe la droite double; mais g'_1 coupe aussi la droite double d . Ainsi g'_1 , g et d seraient dans un même plan.

Il faut donc supposer que d se transforme en elle-même. Or, pour cela, la quadrique directrice doit contenir d .

Les génératrices se transforment deux à deux, mais il y en a deux qui sont transformées d'elles-mêmes et qui, par conséquent, doivent aussi se trouver sur la quadrique directrice. Le calcul se dirigerait d'une manière analogue.

NOTE A PROPOS D'UN THÉORÈME CONNU DE GÉOMÉTRIE.

Par M. A. MANNHEIM.

Le théorème dont il s'agit est généralement énoncé ainsi :

« Dans tout quadrilatère circonscrit à une surface du second ordre les quatre points de contact sont dans un même plan. »

Cet énoncé est trop absolu, car il y a des quadrilatères circonscrits à une quadrique pour lesquels cette propriété n'existe pas. La démonstration même dont on a fait usage pour obtenir le théorème précédent permet d'arriver à cette remarque. On a appliqué le théorème de Carnot qui, dans le cas actuel, conduit à une relation dont tous les termes sont au carré; on a alors pris la racine sans faire précéder celle-ci du double signe qu'elle comporte. Le signe *plus* a donné le théorème précédent, avec le signe *moins* on aurait trouvé les quadrilatères qu'on a négligés. On peut

aussi montrer de la manière suivante l'existence de ces derniers quadrilatères.

Appelons (S) la quadrique donnée, l, m, n, p les points où elle est touchée par les côtés L, M, N, P d'un quadrilatère gauche. Prenons l'une des extrémités du côté L comme sommet d'un cône circonscrit à (S). Ce cône coupe en deux points le côté N opposé à L. Les génératrices de ce cône qui passent par ces points sont P, et une tangente Q qui forme aussi avec L, M, N un quadrilatère gauche circonscrit à (S). Si q est le point de contact de Q, on voit tout de suite que ce point ne peut être dans le plan qui contient l, m, n, p que si L et N sont dans un même plan, et cela est contraire à l'hypothèse; donc L, M, N, Q forment un quadrilatère gauche pour lequel les points de contact des côtés ne sont pas dans un même plan ⁽¹⁾.

Pour préciser davantage, voici ce que j'ajoute.

Transformons la quadrique (S) en une sphère et conservons les mêmes notations.

Supposons fixes les tangentes L, N et rendons mobile la tangente M en l'assujettissant toujours à rencontrer ces droites; cherchons le lieu (m) de son point de contact m avec la sphère (S).

Par L et m faisons passer un plan; il coupe la sphère (S) suivant un cercle tangent en m à M. De même le plan (N, m) donne un cercle tangent en m à M. On peut donc considérer sur (S) deux séries de cercles; l'une des séries est déterminée par des plans passant par L et l'autre par des plans passant par N. La courbe (m) est le lieu des points où les cercles de l'une des séries touchent les cercles de l'autre série.

Pour déterminer la nature de (m), ainsi définie, faisons une inversion en plaçant en l le pôle d'inversion. La sphère (S) et les cercles tangents en n ont pour transformés un plan (Σ) et, sur ce plan, des cercles tangents entre eux en un point γ ; la tangente

⁽¹⁾ Par le calcul, M. Pruvost, dans son excellent Ouvrage : *Leçons de Géométrie analytique*, a aussi trouvé qu'il y a deux genres de quadrilatères circonscrits à une quadrique et que, seulement pour les quadrilatères de l'un de ces genres, les points de contact des côtés sont dans un même plan.

commune en ce point à ces cercles est la trace sur (Σ) du plan (L, N) . Les cercles de l'autre série ont pour transformées des droites tracées sur (Σ) parallèlement à L . Il est facile de voir que :

Sur le plan (Σ) les points où les cercles tangents en γ sont touchés par des parallèles à L appartiennent à deux droites rectangulaires qui passent par γ ; en outre, l'une ou l'autre de ces droites coupe sous des angles égaux les cercles tangents en γ ; enfin que ces deux droites rectangulaires, la tangente en γ aux cercles, et la parallèle à L menée de γ forment un faisceau harmonique.

Revenant par inversion à la sphère (S) , on obtient ce théorème :

1. *On a sur une sphère une série de cercles tangents entre eux en un point l et une autre série de cercles tangents entre eux en un point n . Les points m, q , où ces cercles se touchent appartiennent à deux cercles $(m), (q)$ qui se coupent à angles droits en l, n . Le cercle (m) , ou (q) , coupe sous des angles égaux, en leur point de contact m , ou q , les cercles des deux séries. En l , comme en n , les tangentes à (m) et à (q) et les tangentes aux cercles des deux séries, qui contiennent à la fois l, n , forment un faisceau harmonique.*

D'après ce qui précède on peut énoncer ainsi ce théorème :

2. *Le lieu des points de contact avec la sphère (S) des tangentes M et Q , assujetties à rencontrer deux tangentes à cette surface, se compose de deux cercles $(m), (q)$ qui se coupent à angles droits en l, n points de contact de L, N . Le cercle (m) coupe sous des angles égaux les tangentes M ; de même pour (q) à l'égard des tangentes Q . Les plans de (m) et de (q) et les plans déterminés par la corde ln et par chacune des tangentes fixes L, N forment un faisceau harmonique ⁽¹⁾.*

Si l'on transforme homographiquement ce théorème, on arrive à une propriété relative à une quadrique. En conservant les mêmes

(1) Les tangentes M appartiennent à un hyperboloïde de révolution, de même pour les tangentes Q , cette remarque intéressante a été faite par M. Bricard.

notations et ne parlant que de la transformation de la dernière partie de l'énoncé du théorème 2, on peut dire :

3. *Le lieu des points de contact avec une quadrique des tangentes M ou Q, assujetties à rencontrer deux tangentes L, N à cette surface, se compose de deux coniques : les plans de ces courbes et les plans déterminés par lu et par chacune des tangentes fixes L, N, forment un faisceau harmonique.*

De cette propriété résulte que :

4. *Pour un quadrilatère gauche formé par les tangentes L, M, N, Q à une quadrique, et dont les points de contact l, m, n, q ne sont pas dans un même plan, le point de contact q est l'harmonique conjugué, par rapport aux extrémités du côté Q, du point où ce côté est coupé par le plan (l, m, n).*

Cette propriété, qui éclaireit le théorème objet de cette Note, peut s'obtenir aussi au moyen du théorème de Carnot.

Remarques. — Reprenons le théorème 1 pour le compléter, lorsqu'on l'applique à un plan.

Conservons, sur ce plan, les lettres mêmes qui désignent les points ou lignes de la sphère en ajoutant seulement l'indice 1.

Quelle que soit la position de m_1 sur (m_1) la tangente aux cercles des deux séries, qui passent en ce point, faisant un angle constant avec ce cercle (m_1) , cette droite enveloppe un cercle concentrique à (m_1) . Il en est de même de la droite des centres des cercles des deux séries. Ainsi, dans le cas du plan, on peut ajouter :

5. *Quelle que soit la position de m_1 sur (m_1) , la tangente aux cercles des deux séries qui y passent et la droite des centres de ces cercles, enveloppent des cercles concentriques à (m_1) (1).*

A la sphère (S) circonscrivons un cône le long du petit cercle.

(1) On peut arriver à ce résultat en faisant sur un plan arbitraire la perspective de l'hyperboloïde, lieu des tangentes M, l'œil étant sur la sphère à l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire au plan de projection. Cet hyperboloïde,

section de cette surface par le plan (L, m) . Le sommet de ce cône est sur la droite L' , tangente en l à la sphère et perpendiculaire à L ; il est aussi sur la droite M' , tangente en m à (S) et perpendiculaire à M . De même pour le cône relatif au petit cercle déterminé par le plan (N, m) son sommet, toujours sur M' , est sur la droite N' tangente en n à (S) et perpendiculaire à N .

La courbe (m) est alors aussi le lieu des points de contact de la tangente M' qui rencontre L' , N' . D'après cela : *Si l'on a une sphère et quatre tangentes fixes, deux de ces droites L, L' se coupant à angles droits au point l où elles touchent la sphère, de même pour N, N' , il est possible de déplacer un angle droit de sommet m , dont les côtés sont tangents à la sphère en ce point, de façon que l'un des côtés de cet angle rencontre L, N , tandis que l'autre rencontre L', N' .*

Dans le déplacement ainsi défini, la figure mobile de grandeur invariable remplit plus de cinq conditions. De là résulte la possibilité de trouver des propriétés relatives aux axes instantanés de rotation qu'on peut faire intervenir pour obtenir ce déplacement.

En terminant je ferai remarquer qu'une marche analogue à celle qui a donné le théorème 1 permet d'étudier ce qui concerne les courbes lieux des points de contact des sphères de deux séries : les unes tangentes à un plan en un point et les autres tangentes en un point à un autre plan.

circonscrit à (S) le long de (m) , est de révolution; ses génératrices M font des angles égaux avec (m) et leurs perspectives font alors aussi des angles égaux avec (m) , par suite elles enveloppent un cercle concentrique à cette courbe. De même, si l'on projette les tangentes M à (S) qui sont respectivement perpendiculaires aux tangentes M en leurs points de contact, on obtient l'autre cercle concentrique à (m) .

SUR LES SURFACES QUI PRÉSENTENT UN RÉSEAU CONJUGUÉ
FORMÉ PAR DES COURBES
DONT LES TANGENTES APPARTIENNENT A UN COMPLEXE TÉTRAÉDRALE;

Par M. A. DEMOULIN.

Dans un Mémoire intitulé : *Sur deux classes de surfaces analogues aux surfaces tétraédrales* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIV, p. 2), M. Raffy a posé et résolu le problème suivant :

Trouver toutes les surfaces représentées par les formules

$$x = U_1(u)V_1(v), \quad y = U_2(u)V_2(v), \quad z = U_3(u)V_3(v),$$

les fonctions U_i et V_i étant telles que les courbes $u = \text{const.}$ et les courbes $v = \text{const.}$ forment un réseau conjugué.

Les surfaces satisfaisantes peuvent être réparties en quatre classes définies respectivement par les équations

$$(I) \quad x = U_1 V_1, \quad y = U_2 V_1, \quad z = V_3;$$

$$(II) \quad x = u^{m_1} v^{n_1}, \quad y = u^{m_2} v^{n_2}, \quad z = u^{m_3} v^{n_3};$$

$$(III) \quad x = u^{m_1} e^{m_1 \int \frac{g(v)dv}{v+m_1}}, \quad y = u^{m_2} e^{m_2 \int \frac{g(v)dv}{v+m_2}}, \quad z = u^{m_3} e^{m_3 \int \frac{g(v)dv}{v+m_3}};$$

$$(IV) \quad \begin{cases} \log x = \int \frac{U du}{u+a} + \int \frac{V dv}{v+a}, \\ \log y = \int \frac{U du}{u+b} + \int \frac{V dv}{v+b}, \\ \log z = \int \frac{U du}{u+c} + \int \frac{V dv}{v+c}. \end{cases}$$

Les surfaces des trois dernières classes jouissent d'une propriété commune : les tangentes aux courbes $u = \text{const.}$ et aux courbes $v = \text{const.}$ appartiennent à un même complexe tétraédral dont le tétraèdre fondamental a pour faces les plans coordonnés et le plan de l'infini.

Je me propose de montrer que, réciproquement, *ces surfaces sont les seules qui présentent un réseau conjugué exclusivement formé de courbes dont les tangentes appartiennent à un même complexe tétraédral, l'une des faces du tétraèdre fondamental étant le plan de l'infini.*

J'indiquerai ensuite une nouvelle solution du problème de M. Raffy.

I.

Prenons pour plans coordonnés les faces du tétraèdre situées à distance finie. Les courbes dont les tangentes appartiennent au complexe tétraédral satisfont à l'équation

$$x_1 x dy dz + x_2 y dz dx + x_3 z dx dy = 0,$$

x_1, x_2, x_3 étant trois constantes dont la somme est nulle.

Supposons que les coordonnées x, y, z de la surface cherchée soient exprimées en fonction des paramètres u et v du système conjugué. On a

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial x}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial y}{\partial u} + B \frac{\partial y}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial z}{\partial u} + B \frac{\partial z}{\partial v}.$$

La tangente aux lignes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ appartenant au complexe tétraédral, on a, en outre,

$$\sum x_1 x \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u} = x_1 x \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u} + x_2 y \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} + x_3 z \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} = 0,$$

$$\sum x_1 x \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial v} = x_1 x \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial v} + x_2 y \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} + x_3 z \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} = 0,$$

et le problème consiste à intégrer ce système de cinq équations aux inconnues x, y, z, A, B . A cet effet, posons

$$x = \log x, \quad y = \log y, \quad z = \log z,$$

les équations ci-dessus deviendront

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x'}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial x'}{\partial u} + B \frac{\partial x'}{\partial v} + \frac{\partial x'}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 y'}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial y'}{\partial u} + B \frac{\partial y'}{\partial v} + \frac{\partial y'}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 z'}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial z'}{\partial u} + B \frac{\partial z'}{\partial v} + \frac{\partial z'}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \end{cases}$$

$$(2) \quad \sum \frac{z_1}{\frac{\partial x'}{\partial u}} = 0, \quad \sum \frac{z_1}{\frac{\partial x'}{\partial v}} = 0.$$

Des deux dernières, on déduit, par différentiation,

$$(3) \quad \sum \frac{z_1 \frac{\partial^2 x'}{\partial u \partial v}}{\left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right)^2} = 0, \quad \sum \frac{z_1 \frac{\partial^2 x'}{\partial u \partial v}}{\left(\frac{\partial x'}{\partial v}\right)^2} = 0.$$

Multiplions les équations (1) par $\frac{z_1}{\frac{\partial x'}{\partial u} \frac{\partial x'}{\partial v}}$, $\frac{z_2}{\frac{\partial y'}{\partial u} \frac{\partial y'}{\partial v}}$, $\frac{z_3}{\frac{\partial z'}{\partial u} \frac{\partial z'}{\partial v}}$ respectivement et additionnons les équations obtenues ; il viendra, en tenant compte des équations (2) et de la relation $z_1 + z_2 + z_3 = 0$,

$$(4) \quad \sum z_1 \frac{\frac{\partial^2 x'}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial x'}{\partial u} \frac{\partial x'}{\partial v}} = 0.$$

Les équations (3) et (4) constituent un système de trois équations linéaires homogènes aux inconnues $z_1 \frac{\partial^2 x'}{\partial u \partial v}$, $z_2 \frac{\partial^2 y'}{\partial u \partial v}$, $z_3 \frac{\partial^2 z'}{\partial u \partial v}$. Or, on s'en assurera aisément, le déterminant des coefficients des inconnues n'est nul que si la surface cherchée est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'un des axes coordonnés. Écartant cette solution évidente, on peut remplacer les équations (3) et (4) par les suivantes :

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial u \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 y'}{\partial u \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 z'}{\partial u \partial v} = 0,$$

lesquelles donnent, par intégration,

$$(5) \quad \begin{cases} x' = U_1 + V_1, \\ y' = U_2 + V_2, \\ z' = U_3 + V_3. \end{cases}$$

U_1, U_2, U_3 désignant des fonctions arbitraires de u , et V_1, V_2, V_3 des fonctions arbitraires de v .

Portons ces valeurs de x', y', z' dans les équations (1), il viendra

$$\begin{aligned} \frac{A}{U_1'} + \frac{B}{V_1'} + 1 &= 0, \\ \frac{A}{U_2'} + \frac{B}{V_2'} + 1 &= 0, \\ \frac{A}{U_3'} + \frac{B}{V_3'} + 1 &= 0, \end{aligned}$$

d'où, par élimination.

$$(6) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{U_1'} & \frac{1}{V_1'} & 1 \\ \frac{1}{U_2'} & \frac{1}{V_2'} & 1 \\ \frac{1}{U_3'} & \frac{1}{V_3'} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Quant aux équations (2), elles deviennent

$$(7) \quad S \frac{x_1}{U_1'} = 0, \quad S \frac{x_1}{V_1'} = 0,$$

et l'on est ramené à l'intégration des équations (6) et (7).

Or, l'équation (6) est une conséquence des équations (7), jointes à la condition $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Il suffira donc de s'occuper de ces dernières.

Ces équations sont susceptibles d'une interprétation géométrique qui facilitera la discussion. Si l'on se reporte, en effet, aux équations (5), on reconnaît que le problème actuel revient à la détermination de la surface de translation, lieu des milieux des cordes dont les extrémités s'appuient sur deux lignes (U)

et (V) respectivement définies par les équations

$$\begin{aligned} x' &= 2U_1, & y' &= 2U_2, & z' &= 2U_3, \\ x' &= 2V_1, & y' &= 2V_2, & z' &= 2V_3, \end{aligned}$$

les tangentes à ces lignes étant parallèles aux génératrices du cône

$$\sum \frac{x_i}{x'} = 0.$$

Cela posé, on peut prendre pour (U) et (V) des droites, ou bien, pour (U) une droite et pour (V) une courbe proprement dite, ou enfin, pour (U) et (V) des courbes proprement dites.

Examinons successivement chacun de ces trois cas.

1. (U) et (V) sont des droites.

Soient

$$\begin{cases} U_1 = m_1 \log u + \mu_1, \\ U_2 = m_2 \log u + \mu_2, \\ U_3 = m_3 \log u + \mu_3, \end{cases} \quad \begin{cases} V_1 = n_1 \log v + \nu_1, \\ V_2 = n_2 \log v + \nu_2, \\ V_3 = n_3 \log v + \nu_3, \end{cases}$$

les demi-coordonnées des droites (U) et (V). Ces droites étant parallèles à deux génératrices du cône $\sum \frac{x_i}{x'} = 0$, on a

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{x_1}{m_1} + \frac{x_2}{m_2} + \frac{x_3}{m_3} = 0, \\ \frac{x_1}{n_1} + \frac{x_2}{n_2} + \frac{x_3}{n_3} = 0. \end{cases}$$

La surface de translation correspondante est le plan

$$\begin{aligned} x' &= m_1 \log u + n_1 \log v + \mu_1 + \nu_1, \\ y' &= m_2 \log u + n_2 \log v + \mu_2 + \nu_2, \\ z' &= m_3 \log u + n_3 \log v + \mu_3 + \nu_3, \end{aligned}$$

et la surface cherchée a pour coordonnées

$$x = p_1 u^{m_1} v^{n_1}, \quad y = p_2 u^{m_2} v^{n_2}, \quad z = p_3 u^{m_3} v^{n_3},$$

p_1, p_2, p_3 désignant trois constantes arbitraires. On reconnaît les surfaces de la *deuxième classe*. Ces surfaces peuvent être représentées par l'équation

$$(9) \quad x^A y^B z^C = D,$$

A, B, C, D étant arbitraires. Il suffira, en effet, de déterminer les constantes $m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3$ par les équations (8), auxquelles on adjoindra les suivantes :

$$A m_1 + B m_2 + C m_3 = 0,$$

$$A n_1 + B n_2 + C n_3 = 0.$$

D'après l'énoncé même du problème dont la surface (9) est une solution, les lignes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ constituent un système conjugué, et leurs tangentes appartiennent au complexe tétraédral défini par les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; mais il y a plus : à chacun des complexes tétraédraux, en nombre simplement infini, qui ont même tétraèdre fondamental que le complexe donné, il correspond sur la surface un tel système conjugué. Parmi ces systèmes conjugués, il y en a deux formés par les lignes asymptotiques de l'un ou l'autre système.

II. (U) est une droite et (V) une courbe proprement dite.

Soient

$$U_1 = m_1 \log u + \mu_1,$$

$$U_2 = m_2 \log u + \mu_2,$$

$$U_3 = m_3 \log u + \mu_3,$$

les expressions des demi-coordonnées de la droite (U). Exprimons qu'elle est parallèle à l'une des génératrices du cône $\sum \frac{\alpha_1}{x'} = 0$. Il viendra

$$\frac{\alpha_1}{m_1} + \frac{\alpha_2}{m_2} + \frac{\alpha_3}{m_3} = 0.$$

Cette équation, rapprochée de la condition

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

montre que l'on peut prendre pour $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les quantités

$$m_1(m_2 - m_3), \quad m_2(m_3 - m_1), \quad m_3(m_1 - m_2),$$

en sorte que l'équation du cône s'écrive

$$\sum \frac{m_1(m_2 - m_3)}{x'} = 0.$$

Les tangentes de la courbe (V) seront parallèles aux génératrices

de ce cône, si l'on a

$$\sum \frac{m_1(m_2 - m_3)}{V_1'} = 0.$$

On satisfait de la manière la plus générale à cette équation en posant

$$V_1' = \frac{m_1}{m_1 + v} g(v),$$

$$V_2' = \frac{m_2}{m_2 + v} g(v),$$

$$V_3' = \frac{m_3}{m_3 + v} g(v),$$

$g(v)$ étant une fonction arbitraire de son argument.

On déduit de là les coordonnées de la surface cherchée :

$$x = u^{m_1} e^{m_1 \int \frac{g(v) dv}{v+m_1}}, \quad y = u^{m_2} e^{m_2 \int \frac{g(v) dv}{v+m_2}}, \quad z = u^{m_3} e^{m_3 \int \frac{g(v) dv}{v+m_3}}.$$

Ces équations définissent les surfaces de la *troisième classe*.

III. (U) et (V) sont des courbes proprement dites.

Écrivons l'équation du cône de la manière suivante :

$$\frac{b-c}{x'} + \frac{c-a}{y'} + \frac{a-b}{z'} = 0.$$

Les tangentes aux courbes (U) et (V) étant parallèles aux génératrices de ce cône, on a

$$\frac{b-c}{U_1'} + \frac{c-a}{U_2'} + \frac{a-b}{U_3'} = 0,$$

$$\frac{b-c}{V_1'} + \frac{c-a}{V_2'} + \frac{a-b}{V_3'} = 0.$$

La solution la plus générale de ces équations est donnée par les formules

$$U_1' = \frac{U}{u+a}, \quad V_1' = \frac{V}{v+a},$$

$$U_2' = \frac{U}{u+b}, \quad V_2' = \frac{V}{v+b},$$

$$U_3' = \frac{U}{u+c}, \quad V_3' = \frac{V}{v+c}.$$

On en conclut les équations des surfaces de la *quatrième classe*

$$\log x = \int \frac{U}{u+a} du + \int \frac{V}{v+a} dv,$$

$$\log y = \int \frac{U}{u+b} du + \int \frac{V}{v+b} dv,$$

$$\log z = \int \frac{U}{u+c} du + \int \frac{V}{v+c} dv.$$

Le problème que nous venons de résoudre a été posé pour la première fois par M. Sophus Lie. D'après l'illustre auteur (*), les surfaces de la quatrième classe constitueraient la solution la plus générale de la question. On vient de voir qu'à ces surfaces il faut joindre les surfaces de la deuxième classe, connues depuis longtemps, et les surfaces de la troisième classe, découvertes par M. Raffy à l'occasion du problème rappelé au début de ce travail.

II.

Il y a peu de chose à ajouter aux calculs qui précèdent pour obtenir une nouvelle solution du problème de M. Raffy.

Soit à chercher les surfaces définies par les équations

$$x = U_1 V_1, \quad y = U_2 V_2, \quad z = U_3 V_3,$$

les lignes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ formant un système conjugué.

Après avoir considéré le cas où la dérivée de l'une des six fonctions U_i, V_k serait nulle, ce qui le conduit aux surfaces de la première classe, M. Raffy est amené à intégrer l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{U_1}{U_1'} & \frac{V_1}{V_1'} & 1 \\ \frac{U_2}{U_2'} & \frac{V_2}{V_2'} & 1 \\ \frac{U_3}{U_3'} & \frac{V_3}{V_3'} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

(*) *Geometrie der Berührungstransformationen*, p. 384.

qui peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{(\log U_1)'} & \frac{1}{(\log V_1)'} & 1 \\ \frac{1}{(\log U_2)'} & \frac{1}{(\log V_2)'} & 1 \\ \frac{1}{(\log U_3)'} & \frac{1}{(\log V_3)'} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

De cette équation, on déduit

$$(10) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

$$(11) \quad \frac{\alpha_1}{(\log U_1)'} + \frac{\alpha_2}{(\log U_2)'} + \frac{\alpha_3}{(\log U_3)'} = 0,$$

$$(12) \quad \frac{\alpha_1}{(\log V_1)'} + \frac{\alpha_2}{(\log V_2)'} + \frac{\alpha_3}{(\log V_3)'} = 0.$$

Je dis que les rapports mutuels des fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont constants.

En effet, les équations (10) et (11) donnent

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \frac{1}{(\log U_3)'} = \frac{\alpha_1}{(\log U_1)'} + \frac{\alpha_2}{(\log U_2)'},$$

d'où

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \text{fonction de } u.$$

De même, de (10) et (12) on conclut que $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ est une fonction de v . Le rapport $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ est donc constant, et il en est de même du rapport $\frac{\alpha_1}{\alpha_3}$.

On a donc, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ désignant des constantes,

$$S \frac{\alpha_1}{(\log U_1)'} = 0, \quad S \frac{\alpha_1}{(\log V_1)'} = 0, \quad S \alpha_1 = 0,$$

et, de ces équations, on déduira, comme ci-dessus, les surfaces des trois dernières classes.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 5 MAI 1897.

PRÉSIDENTE DE M. DE POLIGNAC.

Communications :

M. Bricard : *Étude géométrique d'un déplacement remarquable et d'un hyperboloïde articulé.*

M. Raffy : *Sur les surfaces conjuguées à un complexe tétraédral.*

M. Laisant : *Sur l'interpolation successive.*

M. ANDRADE adresse une *Note sur les courbes gauches associées et sur les développables circonscrites à une sphère.*

SÉANCE DU 19 MAI 1897.

PRÉSIDENTE DE M. PICARD.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Lacauchie, présenté par MM. Lemoine et Brocard ; M. l'abbé de Montchenil, présenté par MM. Haton de la Goupillière et Kænigs.

Communications :

M. Fleury : *Sur le postulatum d'Euclide.*

M. Picard : *Sur le nombre des conditions qui expriment qu'une surface passe par une courbe gauche.*

M. BOURLET adresse un Mémoire *Sur les transmutations.*

M. BEUDON adresse un Mémoire *Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles.*

M. LÉMERAY adresse la Note suivante :

Dérivée des fonctions itératives par rapport à l'indice d'itération.

Soit la fonction $y_1 = f y$ et ses puissances successives, $y_i = f^i y$

correspondant à la valeur $x + i$ de l'indice d'itération. On ne sait pas le plus souvent obtenir la dérivée de y par rapport à x ; mais on peut l'exprimer au moyen d'un produit calculable quel que soit x , et convergent pourvu que la substitution y, fy tende vers une limite Y qui est, comme l'on sait, racine de l'équation $fy - y = 0$. Supposons de plus la convergence *régulière*, et considérons d'abord le cas où la dérivée de la fonction f au point limite a une valeur a inférieure à l'unité; on sait qu'alors la fonction

$$(1) \quad \frac{y_i - Y}{a^i}$$

tend vers une limite déterminée pour i infini. Cette limite est la même que celle de

$$(2) \quad \frac{1}{a^i L a} \frac{dy_i}{di}.$$

Les limites de (1) et (2) sont identiques respectivement à

$$(1') \quad (y - Y) \prod_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{a} \frac{y_i - Y}{y_{i-1} - Y}, \quad (2') \quad \frac{1}{L a} \prod_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{a} \frac{dy_i}{dy_{i-1}},$$

A désignant $\frac{dy_i}{di}$ pour $i = 0$; c'est-à-dire $\frac{dy}{dx}$. Donc

$$\frac{dy}{dx} = (y - Y) L a \prod_{i=1}^{i=\infty} \frac{y_i - Y}{y_{i-1} - Y} \left(\frac{dy_i}{dy_{i-1}} \right)^{-1},$$

expression évidemment convergente dans les hypothèses faites.

Supposons maintenant généralement que, pour $y = Y$, les $p - 1$ premières dérivées de $fy - y$ par rapport à y s'annulent. La substitution y, fy peut alors être ou divergente, ou convergente; supposons qu'il y ait convergence. On sait qu'alors (1)

$$\lim i(y_i - Y)^{p-1} = \frac{-p!}{P(p-1)},$$

P étant la valeur, supposée différente de zéro, de la dérivée $p^{\text{ième}}$

(1) Un théorème sur les fonctions itératives. (Bull. de la Soc. math., t. XXIII, 1895.)

au point limite. Or les deux expressions

$$(3) \quad i(y_i - Y)^{p-1}, \quad - i^2(p-1)(y_i - Y)^{p-2} \frac{dy_i}{di}$$

ont la même limite; il en sera de même si l'on y remplace les facteurs i et $-i^2$ par $i+1$ et $-(i+1)^2$; les limites des produits ainsi obtenus sont respectivement identiques à

$$(y - Y)^{p-1} \prod_{i=1}^{i=\infty} \frac{i+1}{i} \left(\frac{y_i - Y}{y_{i-1} - Y} \right)^{p-1},$$

$$\Lambda(p-1)(y - Y)^{p-2} \prod_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{i+1}{i} \right)^2 \frac{y_i - Y}{y_{i-1} - Y} \frac{dy_i}{dy_{i-1}}.$$

On a donc une première expression

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \Lambda = \frac{-1}{p-1} (y - Y) \prod_{i=1}^{i=\infty} \frac{i}{i+1} \frac{y_i - Y}{y_{i-1} - Y} \left(\frac{dy_i}{dy_{i-1}} \right)^{-1}.$$

En tenant compte de la valeur de la limite, on a aussi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p!}{p(p-1)^2} \frac{1}{(y - Y)^{p-2}} \prod_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{i}{i-1} \right)^2 \frac{y_{i-1} - Y}{y_i - Y} \left(\frac{dy_i}{dy_{i-1}} \right)^{-1}.$$

Il convient de remarquer que si le produit (3) tend vers une limite, il en sera de même pour le produit obtenu en y remplaçant le facteur i par $i+j$, j étant un nombre quelconque fini et que nous supposerons entier. On pourra donc remplacer dans l'expression (4), par exemple, $\frac{i}{i+1}$ par $\frac{i+j}{i+j+1}$. Si l'on veut s'en servir pour calculer la valeur de la dérivée, on pourra, en appelant Λ_i une valeur approchée de Λ et supposée connue, déterminer j en posant

$$\Lambda_i = \frac{-1}{p-1} (y - Y) \frac{1}{r+1},$$

et en prenant pour j l'entier le plus voisin de r . Le produit II joue alors le rôle d'un facteur correctif.

Ces formules donnent la dérivée indépendamment de x .

M. E. GOURSAT adresse la Note suivante :

Sur les équations linéaires qui admettent quatre intégrales
liées par une relation quadratique.

Dans un article récent (voir *Bulletin*, t. XXV, p. 36-48), j'ai signalé une propriété des équations linéaires du second ordre, qui sont telles que l'on peut passer de l'équation à son adjointe par une transformation (m, n) de M. Darboux, et j'ai considéré en particulier les équations (E) dont l'adjointe (E') se déduit de (E) par une transformation de Laplace. Il me paraît intéressant de faire remarquer que les équations linéaires, admettant *quatre* intégrales linéairement distinctes, liées par une relation quadratique, qui jouent un si grand rôle dans la théorie des surfaces, appartiennent à la classe générale dont je viens de rappeler la propriété; ce qui fournit en même temps la raison la plus simple d'une propriété curieuse de ces équations.

Soit (E) une équation linéaire du second ordre

$$(E) \quad s + ap + bq + cz = 0,$$

et soit (E') son adjointe

$$(E') \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial v}{\partial x} - b \frac{\partial v}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} \right) v = 0.$$

Si l'on passe de l'équation (E) à l'équation (E') par une transformation (m, n) , l'intégrale générale de l'équation (E') est de la forme

$$(1) \quad v = A_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \dots + A_m \frac{\partial^m z}{\partial x^m} + B_1 \frac{\partial z}{\partial y} + \dots + B_n \frac{\partial^n z}{\partial y^n} + C z,$$

$A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n, C$ étant des fonctions déterminées de x, y et z l'intégrale générale de l'équation (E). On en déduit immédiatement que, *si la suite de Laplace relative à l'équation (E) se termine dans un sens, elle se termine aussi dans l'autre sens*. Supposons, par exemple, que la suite de Laplace relative à l'équation (E) se termine du côté des indices positifs après r transformations; cette équation admet donc une intégrale de la forme

$$z = xX + x_1 X' + \dots + x_r X^{(r)},$$

$x, x_1, \dots, x_r$ étant des fonctions déterminées de x, y . X une fonc-

tion arbitraire de x , et $X', \dots, X^{(r)}$ ses dérivées. Si l'on substitue cette valeur de z dans la formule (1), on en conclut que l'équation (E) admet une intégrale de même forme

$$v = \beta X + \beta_1 X' + \dots + \beta_{m+r} X^{(m+r)};$$

la suite de Laplace relative à l'équation (E') se termine donc, du côté des indices positifs, après $m + r$ transformations au plus. Par suite, d'après les relations qui existent entre une équation linéaire et son adjointe, la suite de Laplace relative à l'équation (E) doit se terminer, du côté des indices négatifs, après $m + r$ transformations au plus.

Rappelons encore les propriétés suivantes des équations linéaires ⁽¹⁾. Soient x, y, z, t quatre intégrales linéairement distinctes d'une équation (E)

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2 \partial z_1} + a \frac{\partial \Theta}{\partial z} + b \frac{\partial \Theta}{\partial z_1} + c \Theta = 0,$$

où nous désignerons par z, z_1 les variables indépendantes; si l'on considère x, y, z, t comme les coordonnées homogènes d'un point, ce point décrit une surface (Σ) , sur laquelle les courbes $z = \text{const.}$ et $z_1 = \text{const.}$ forment un réseau conjugué. Soient u, v, w, p les coordonnées tangentielles homogènes de la surface (Σ) , qui sont liées aux premières par les relations

$$(3) \quad \begin{cases} ux + vy - wz + pt = 0, \\ u \frac{\partial x}{\partial z} + v \frac{\partial y}{\partial z} + w \frac{\partial z}{\partial z} - p \frac{\partial t}{\partial z} = 0, \\ u \frac{\partial x}{\partial z_1} + v \frac{\partial y}{\partial z_1} + w \frac{\partial z}{\partial z_1} + p \frac{\partial t}{\partial z_1} = 0; \end{cases}$$

u, v, w, p satisfont à une équation linéaire de même forme (G)

$$(4) \quad \frac{\partial U^2}{\partial z^2 \partial z_1} + a_1 \frac{\partial U}{\partial z} + b_1 \frac{\partial U}{\partial z_1} + c_1 U = 0,$$

et, si l'on désigne par U l'intégrale générale de cette équation (4), l'intégrale générale de l'équation (E') adjointe de (E) est l'expression (u, v) définie par la condition de s'annuler pour $U = u, v$,

⁽¹⁾ DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, I, II, p. 187-199.

w, p , c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} U & \frac{\partial U}{\partial z} & \frac{\partial U}{\partial z_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial z_1^2} \\ u & \frac{\partial u}{\partial z} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} \\ v & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p & \frac{\partial p}{\partial z} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 p}{\partial z_1^2} \end{vmatrix}.$$

La démonstration de la propriété que nous avons en vue est maintenant bien facile. Supposons que l'équation (3) admette quatre intégrales linéairement distinctes, liées par une relation quadratique homogène à coefficients constants et à discriminant différent de zéro. Nous pouvons admettre que cette relation a été mise sous la forme

$$(5) \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$

x, y, z, t étant quatre intégrales distinctes. On déduit de la relation (5)

$$x \frac{\partial x}{\partial z} + y \frac{\partial y}{\partial z} + z \frac{\partial z}{\partial z} + t \frac{\partial t}{\partial z} = 0,$$

$$x \frac{\partial x}{\partial z_1} + y \frac{\partial y}{\partial z_1} + z \frac{\partial z}{\partial z_1} + t \frac{\partial t}{\partial z_1} = 0,$$

et, en comparant avec les formules (3), on voit que l'on peut prendre

$$u = x, \quad v = y, \quad w = z, \quad p = t,$$

de sorte que l'équation (4) sera identique à l'équation (3). L'intégrale générale de l'équation (E') adjointe de (E) est donc fournie par l'expression (2, 2) écrite plus haut, où U est l'intégrale générale de l'équation (E) elle-même. D'après la remarque générale faite en commençant, on en conclut que, si la suite de Laplace, relative à l'équation (2), se termine dans un sens après n opérations, elle se termine dans l'autre sens après $n + 2$ opérations au plus.

On voit que cette propriété se déduit, au fond, de cette remarque bien simple, qu'un système conjugué tracé sur une quadrique est à lui-même son propre corrélatif.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE D'UN DÉPLACEMENT REMARQUABLE ET D'UN HYPERBOLOÏDE ARTICULÉ.

Par M. RAOUL BRIGARD.

I.

Dans une Note présentée récemment à l'Académie des Sciences (1), j'ai dit quelques mots de la déformabilité propre à la figure constituée par les génératrices d'un même système et deux sections circulaires parallèles d'un hyperboloïde, ces diverses lignes étant supposées rigides et articulées en leurs points de rencontre.

Je me propose, dans cette étude, de revenir sur cette figure et d'en signaler les propriétés les plus intéressantes.

Je commencerai par établir le théorème suivant qui, peut-être, a déjà été remarqué :

Deux sections circulaires parallèles d'un hyperboloïde sont divisées semblablement par les génératrices d'un même système.

Considérons, d'abord, deux coniques quelconques C et C' tracées sur un hyperboloïde. Les génératrices d'un même système divisent homographiquement ces deux coniques; en effet, par un point m pris sur l'une des coniques, on ne peut mener qu'une génératrice du système considéré, et cette génératrice rencontre la seconde conique en un point unique m' . Il existe donc une correspondance uniforme entre les points m et m' des coniques C et C' , et l'on sait qu'une telle correspondance est nécessairement homographique.

Si a et a' sont les points d'intersection des deux coniques, chacune de ces points est son propre homologue dans cette correspondance homographique.

(1) *Comptes rendus des séances*, t. CXXIII, p. 939.

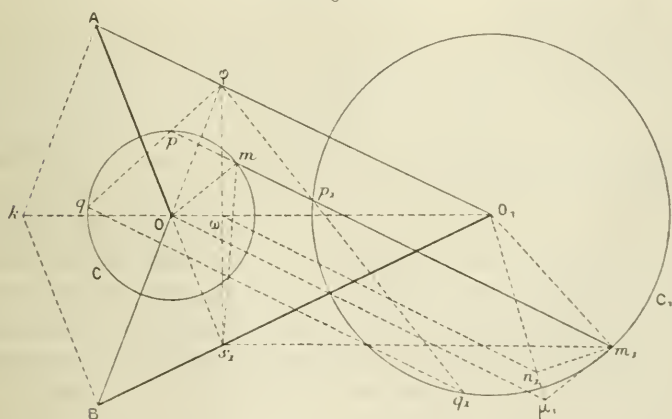
Supposons, maintenant, que les coniques C et C' soient deux cercles situés dans des plans parallèles P et P' . Les points a et a' deviennent les points cycliques, confondus deux à deux, des plans P et P' ; les deux divisions homographiques, déterminées sur les deux cercles par les génératrices d'un même système de l'hyperboloïde, sont donc telles que les points cycliques du plan P , points qui appartiennent à la première division, aient pour homologues, dans la deuxième division, les points cycliques du plan P' . On sait que, dans ces conditions, les deux divisions sont *semblables*, et le théorème est démontré ⁽¹⁾.

On verrait de même que, réciproquement, *les droites qui joignent deux à deux les points homologues de deux divisions semblables, tracées sur des cercles dont les plans sont parallèles, sont les génératrices d'un même système d'un hyperboloïde qui contient ces deux cercles.*

Je donnerai de cette réciproque la démonstration suivante, qui est plus longue mais qui rend mieux compte de la génération de l'hyperboloïde.

Prenons comme plan de la figure (fig. 1) le plan P du cercle C .

Fig. 1.



La projection du cercle C' sur le plan est un cercle C_1 (d'une

(¹) On peut encore donner de cette proposition l'élégante démonstration suivante qu'a bien voulu me communiquer M. Mannheim :

Projetons les sections circulaires de l'hyperboloïde sur le plan de l'une d'elles.

manière générale, je désignerai par une lettre affectée d'un accent un point ou une ligne appartenant au plan P' , et par la même lettre affectée de l'indice 1 la projection de ce point ou de cette ligne sur le plan P). Appelons O et O' les centres des deux cercles.

Soient m, m' deux points homologues quelconques de deux divisions semblables tracées sur les deux cercles. Menons par le point O une droite parallèle à mm' . Cette droite rencontre le plan P' en un point μ' tel que les longueurs $O\mu'$, mm' soient égales.

Quand le point m se déplace sur le cercle C , le triangle $O'm'\mu'$ reste de grandeur invariable; en effet, ses côtés $O'm'$ et $\mu'm'$ sont égaux respectivement aux rayons des cercles C' et C ; de plus, l'angle en m' de ce triangle est égal à l'angle, constant par hypothèse, que font entre elles les directions Om et $O'm'$.

Soit maintenant n' la projection du point m' sur $O'\mu'$. Par n' menons à mm' une parallèle qui rencontre la droite OO' au point ω . Il est clair que la longueur du segment $O'n'$ est constante, et que, par suite, le point n' décrit une circonférence de centre O' , quand on fait varier la position du point m sur le cercle C . Quant au point ω , il est fixe, car il divise OO' dans un rapport égal au rapport constant $\frac{n'\mu'}{n'O'}$.

La droite $\omega n'$ engendre donc un cône R , à base circulaire. Sa trace sur le plan P' du plan tangent à ce cône le long de la génératrice $\omega n'$ est la droite $n'm'$, tangente au cercle lieu du point n' .

Considérons l'hyperboloïde H qui a le cône R pour cône asymptote et qui passe par le point m' . La trace de cet hyperboloïde sur le plan P' est le cercle C' , homothétique par rapport au point O' de la section faite par le même plan dans le cône R . Par le point m' passe une génératrice de H parallèle à la droite $\omega n'$, génératrice de contact du cône R avec l'un des plans tangents menés à ce cône par le point m' . Cette génératrice se confond donc avec mm' .

les projetantes étant parallèles au diamètre conjugué de ce plan dans l'hyperboloïde; nous obtenons des circonférences concentriques.

L'une de ces courbes est la projection du cercle qui forme contour apparent; les génératrices ont pour projections des tangentes à ce cercle; il est alors bien évident qu'elles déterminent des divisions semblables sur les autres sections circulaires de la surface.

En d'autres termes, la droite mm' engendre un hyperboloïde H dont le cône asymptote est R et dont le centre est par conséquent le point ω .

Pour déterminer le centre ω , sans avoir à construire une génératrice particulière de l'hyperboloïde, on peut recourir à la considération du *centre de similitude* S_1 des deux divisions tracées sur les cercles C et C_1 . Ce point, comme on sait, est unique et jouit des propriétés suivantes :

1° Le rapport $\frac{OS_1}{O_1S_1}$ est égal au rapport des rayons des deux cercles ;

2° Si m et m_1 sont deux points homologues quelconques des deux divisions, le triangle mS_1m_1 est semblable au triangle OS_1O_1 ;

3° L'angle constant que font entre elles les directions Om, O_1m_1 est égal à l'angle OS_1O_1 .

Il résulte de la première et de la troisième propriété que le triangle $p_1m_1O_1$ est aussi semblable au triangle OSO_1 . Les points n_1 et ω_1 tels que l'on ait

$$\frac{n_1p_1}{n_1O_1} = \frac{\omega O}{\omega O_1}$$

sont homologues dans ces deux triangles et, par suite, *le point ω est la projection du point S_1 sur OO_1* , ce qui détermine le centre de l'hyperboloïde H en projection horizontale.

Nous disons que les droites mm' sont les génératrices *du premier système* de H . Il est intéressant de déterminer les génératrices du second système.

Le plan projetant sur le plan P l'une quelconque de ces génératrices coupe l'hyperboloïde H suivant deux droites et contient, par suite, une génératrice du premier système ; les projections des génératrices des deux systèmes sont donc confondues deux à deux. Cherchons, par exemple, la génératrice du second système qui se projette en mm_1 . Elle contient nécessairement le point p et le point p' , projetés respectivement aux seconds points d'intersection de la droite mm_1 avec les cercles C et C_1 . C'est donc la droite pp' .

Les points p et p' , intersections des cercles C et C' avec les génératrices d'un même système de l'hyperboloïde H , doivent

encore appartenir à des divisions semblables tracées sur ces deux cercles : on vérifie immédiatement ce fait en remarquant que les droites Op et O_1p_1 , dont les inclinaisons sur mm_1 sont respectivement les mêmes que celles des droites Om et O_1m_1 , font entre elles un angle égal à celui de ces dernières droites. On voit aussi que le centre de similitude des divisions $(p), (p_1)$ est le point φ , symétrique du point S_1 par rapport à OO_1 .

II.

Je vais maintenant établir la déformabilité de l'hyperboloïde H , dans les conditions énoncées au début de cette étude.

Fixons le cercle C et déplaçons le cercle invariable C' de manière que son plan P' reste parallèle au plan P et que *trois* de ses points, a', b', c' , restent respectivement à des distances constantes des points homologues a, b, c , qui appartiennent au cercle C .

Ce déplacement est possible et déterminé, puisque le cercle C' est ainsi assujéti à *cinq* conditions.

Soit m' un point quelconque du cercle C' . Je vais montrer que le plan normal à sa trajectoire (m') passe constamment par le point fixe m , qui est son homologue sur le cercle C .

Considérons, en effet, le cercle C' dans l'une de ses positions, et déplaçons-le infiniment peu de toutes les manières possibles, en supprimant un moment l'obligation pour le plan P' de rester parallèle au plan P (condition *double*). Le cercle C' n'est plus assujéti qu'à trois conditions, et ce déplacement est *doublement* indéterminé : on peut donner une direction arbitraire à un point lié à ce cercle.

Mais il y a exception ⁽¹⁾ pour tous les points de l'hyperboloïde défini par les trois droites aa', bb', cc' , c'est-à-dire de l'hyperboloïde H et, en particulier, pour les points du cercle C' . Tous ces points décrivent des éléments de surfaces trajectoires, quel que soit le déplacement infinitésimal de cercle C' . La normale au point m' , à la surface trajectoire de ce point, est la génératrice $m'm$ de l'hyperboloïde H .

(1) MANNHEIM, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 313.

Rétablissons maintenant la condition double supprimée. Pour un déplacement infiniment petit du cercle C' , la trajectoire du point m' appartient à la surface trajectoire dont nous avons reconnu l'existence.

Le plan normal à cette trajectoire, au point m' , contient donc la droite $m'm$ et passe par le point m .

Les droites $m'm$, dans leur nouvelle position, forment encore un hyperboloïde, puisque les plans P et P' n'ont pas cessé d'être parallèles : on peut donc appliquer le même raisonnement à un nouveau déplacement infiniment petit du plan P' .

En passant au déplacement fini, on voit que le plan normal à la trajectoire du point m' passe bien par le point fixe m , comme il avait été annoncé. Cette trajectoire appartient donc à une sphère dont le centre est en m , et la distance mm' reste constante. Il en est de même pour tous les segments de génératrices de l'hyperboloïde H , compris entre des points homologues des cercles C et C' . On peut énoncer ainsi qu'il suit le résultat obtenu :

Les deux cercles C et C' étant supposés rigides, joignons deux à deux leurs points homologues par des tiges également rigides, articulées en ces points; le système ainsi obtenu est déformable. Pendant sa déformation, les plans des cercles C et C' restent constamment parallèles et les tiges mm' ne cessent pas d'appartenir à un hyperboloïde.

III.

Fixant toujours le cercle C , nous allons chercher à définir aussi complètement que possible le déplacement du cercle C' . A cet effet, traçons les droites $O\varphi$, $O_1\varphi$, respectivement symétriques des droites OS_1 , O_1S_1 par rapport à la droite OO_1 . Soient A le point de rencontre des droites OS_1 , $O_1\varphi$; B le point de rencontre des droites $O\varphi$, O_1S_1 . Le quadrilatère $AOBO_1$ a ses côtés de longueurs constantes.

Pour le faire voir, remarquons d'abord qu'on a les égalités

$$(1) \quad \frac{AO}{AO_1} = \frac{S_1O}{S_1O_1},$$

$$(2) \quad \frac{\overline{OO_1}^2}{OS_1} = \frac{\overline{AO_1}^2 - \overline{AO}^2}{AO}.$$

La première de ces égalités résulte de ce que OO_1 est bissectrice de l'angle AO_1S_1 .

Pour démontrer l'égalité (2), désignons par K le quatrième sommet du losange construit sur les droites AO , OB . Les trois points O_1 , O , K sont en ligne droite et les triangles AKO_1 , S_1OO_1 sont semblables, en vertu des égalités d'angles

$$\widehat{AO_1O} = \widehat{OO_1S_1}, \quad \widehat{AKO_1} = \widehat{AOK} = \widehat{S_1OO_1}.$$

On a donc la relation

$$\frac{O_1O}{OS_1} = \frac{O_1K}{AK} = \frac{O_1K}{AO},$$

d'où

$$\frac{\overline{O_1O}^2}{OS_1} = \frac{O_1O \cdot O_1K}{AO}.$$

Mais le produit $O_1O \cdot O_1K$ n'est autre chose que la puissance du point O_1 par rapport au cercle de centre A et de rayon AO . En le remplaçant alors dans l'égalité précédente par sa valeur $\overline{AO_1}^2 - \overline{AO}^2$, on obtient bien l'égalité (2).

Cela établi, considérons une nouvelle position C'' , projetée en C_2 , du cercle C' dans le déplacement dont on a reconnu l'existence. Soit m'' la nouvelle position du point m' , m_2 la projection de m'' sur le plan P ; soit encore S_2 le centre de similitude des cercles C et C_2 (ces points ne sont pas marqués sur la figure).

On a l'égalité

$$mm' = mm'',$$

d'où

$$\overline{mm'}^2 = \overline{mm''}^2$$

et

$$\overline{mm_1}^2 + z_1^2 = \overline{mm_2}^2 + z_2^2,$$

en désignant par z_1 et z_2 les distances respectives des plans P' et P'' au plan P . On tire de là

$$\overline{mm_1}^2 - \overline{mm_2}^2 = z_2^2 - z_1^2,$$

le second membre étant indépendant de la position du point m sur le cercle C . Or on a, d'après les propriétés connues du centre

de similitude,

$$mm_1 = \frac{OO_1}{S_1O} S_1m, \quad mm_2 = \frac{OO_2}{S_2O} S_2m,$$

et, par suite,

$$\frac{\overline{OO_1}^2}{\overline{S_1O}^2} \overline{S_1m}^2 - \frac{\overline{OO_2}^2}{\overline{S_2O}^2} \overline{S_2m}^2 = z_2^2 - z_1^2.$$

Ceci devant avoir lieu, quelle que soit la position du point m sur le cercle C , il faut que le cercle se confonde avec le lieu des points m dont les distances aux points S_1 et S_2 satisfont à la relation précédente. En raison de théorèmes bien connus, cela exige que le point O soit situé sur la droite S_1S_2 , et aussi que l'on ait l'égalité

$$\frac{\overline{OO_1}^2}{\overline{S_1O}^2} = \frac{\overline{OO_2}^2}{\overline{S_2O}^2},$$

ou

$$\frac{\overline{OO_1}^2}{\overline{S_1O}^2} = \frac{\overline{OO_2}^2}{\overline{S_2O}^2}.$$

Nous avons considéré deux positions successives du cercle C_2 . On peut supposer que la seconde est fixe; alors les résultats obtenus s'exprimeront de la manière suivante :

1° Pendant le déplacement du cercle C_1 , le point S_1 décrit une droite passant par le point O ; en d'autres termes *la droite OA est fixe en direction*;

2° On a la relation

$$\frac{\overline{OO_1}^2}{\overline{S_1O}^2} = \text{const.},$$

à laquelle il faut ajouter

$$\frac{S_1O}{\overline{S_1O_1}} = \frac{R}{R_1},$$

R et R_1 désignant les rayons des cercles C et C_1 .

En nous reportant alors aux relations (1) et (2), nous obtenons

$$\frac{AO}{\overline{AO_1}} = \frac{R}{R_1}, \quad \frac{\overline{AO_1}^2 - \overline{AO}^2}{\overline{AO}^2} = \text{const.}.$$

ce qui établit bien la constance des longueurs AO , $\overline{AO_1}$, et aussi

des longueurs BO , BO_1 , qui leur sont respectivement égales. Il est aussi démontré que le quadrilatère $AOBO_1$ a ses côtés de longueurs invariables.

On peut enfin ajouter la remarque suivante : la droite OA , avons-nous dit, reste fixe pendant le déplacement du cercle C_1 ; si l'on considérait le déplacement inverse, on verrait de la même manière que la droite O_1B , qui joue, par rapport au cercle C_1 , le même rôle que la droite OA par rapport au cercle C , serait alors immobile. En d'autres termes, *le cercle C_1 est invariablement lié à la droite O_1S_1 .*

Nous résumerons ainsi les résultats obtenus :

Soit $AOBO_1$ un quadrilatère articulé, tel que ses côtés AO et BO soient égaux entre eux, ainsi que les côtés AO_1 et BO_1 (spear-head ou kite des géomètres anglais). C et C_1 sont deux cercles de centres O et O_1 , dont les rayons sont proportionnels aux côtés AO , AO_1 , auxquels ils sont respectivement liés. On fixe le côté AO et l'on déforme le quadrilatère. Le déplacement qui en résulte pour le cercle C_1 est identique à celui qui résulte de la déformation de l'hyperboloïde H considéré précédemment.

Quant au cercle C' , il est lié à un cylindre de révolution ayant pour section droite le cercle C_1 , entraîné dans le déplacement de ce cercle, mais ayant la faculté de glisser le long de ses génératrices.

On achève de déterminer le déplacement de C' en obligeant un de ses points à rester à distance constante d'un point homologue du cercle C .

Remarque. — Pour une position quelconque du cercle C_1 , le centre instantané de rotation de la figure entraînée dans le déplacement de ce cercle est le point φ , situé à l'intersection des droites OB , AO_1 , qui sont normales aux trajectoires des points B et O_1 liés à ce cercle. Le point φ' du plan P' qui est projeté en φ est le foyer de ce plan, puisque son déplacement infiniment petit lui est normal.

On peut obtenir directement ce résultat en appliquant les pro-

priétés connues relatives au déplacement infinitésimal d'un plan⁽¹⁾.

Soit pp' une génératrice D du second système de H . Proposons-nous de trouver la droite Δ conjuguée de D relativement au déplacement infiniment petit du plan P' . Une génératrice quelconque du premier système, étant normale à la trajectoire d'un certain point du plan P' et rencontrant la droite D , doit aussi rencontrer la droite Δ . Il en résulte que Δ est, comme D , une génératrice du second système.

En outre, les projections des droites D et Δ sur le plan P' doivent se couper en un point de la caractéristique de ce plan. Mais cette caractéristique est à l'infini, puisque le plan P' reste constamment parallèle au plan P . Les projections en question sont donc parallèles.

Il est dès lors très facile de construire la droite Δ : soient q et q_1 les points où les droites φp et φp_1 rencontrent de nouveau les cercles C et C_1 . Comme on l'a remarqué précédemment (§ 1), les points p et p_1 appartiennent à deux divisions semblables tracées sur les cercles C et C_1 et dont le centre de similitude est le point φ , symétrique du point S par rapport à OO_1 . Les points q et q_1 , situés, l'un sur la droite φp , l'autre sur la droite φp_1 , sont nécessairement homologues. Le triangle φpp_1 est donc semblable au triangle φqq_1 , et la droite qq_1 est parallèle à pp_1 .

Par conséquent, la génératrice qq_1 du second système, projetée en qq_1 , est la droite Δ cherchée.

Quand on fait varier le couple de droites conjuguées D , Δ , la droite qui joint leurs traces sur le plan P' passe constamment par le foyer de ce plan. Mais cette droite est $p'q'$, qui passe constamment par le point φ' projeté en φ . On retrouve donc bien que φ' est le foyer du plan P .

IV.

Il est un cas auquel la définition trouvée pour le déplacement du cercle C_1 cesse de s'appliquer : c'est celui où les rayons R et R_1 sont égaux ; en effet, les droites OA , O_1B , OB , O_1A deviennent alors parallèles deux à deux et les côtés du quadrilatère $AOBO_1$

(¹) MANNHEIM, *loc. cit.*, p. 123.

sont tous de longueurs infinies. Voici comment les conclusions doivent être modifiées :

Le point A s'éloignant à l'infini sur la droite fixe OA, le point O_1 décrit alors une droite perpendiculaire à OA.

Le déplacement du cercle C_1 peut être obtenu par le roulement d'une certaine courbe Γ_1 , liée à ce cercle, sur une courbe fixe Γ . Comme le déplacement inverse lui est nécessairement identique, il faut que les courbes Γ et Γ_1 soient égales et constamment symétriques par rapport à leur tangente commune. En adjoignant à cette condition l'obligation pour le point O_1 de décrire une droite, on voit facilement que les courbes Γ et Γ_1 sont deux paraboles, ayant leurs foyers respectivement en O et en O_1 . Le point de contact de ces deux paraboles est au point φ , symétrique du point S, par rapport à OO_1 , puisque ce point, on l'a vu, est le centre instantané de rotation de la figure invariable entraînée par le cercle C_1 .

Donc, dans ce cas particulier, le déplacement du cercle C' peut être obtenu en liant ce cercle à un cylindre parabolique qui roule sur un cylindre égal en lui restant toujours symétrique par rapport au plan tangent commun, et qui, de plus, reçoit un glissement le long de ses génératrices.

SUR LES CARACTÉRISTIQUES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

Par M. JULES BEUDON.

Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences ⁽¹⁾, j'ai indiqué rapidement une extension de la notion de caractéristique aux équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur au premier et à plus de deux variables indépendantes. Je me propose de donner ici la démonstration des faits que j'ai énoncés; mais j'indiquerai auparavant une terminologie qui nous sera d'une grande utilité ⁽²⁾.

⁽¹⁾ J. BEUDON, *Sur les singularités des équations aux dérivées partielles* (*Comptes rendus des séances*, t. CXIV, 29 mars 1897).

⁽²⁾ Voir, pour plus de détail, J. BEUDON, *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles dont les caractéristiques dépendent d'un nombre fini de paramètres* (*Annales de l'École Normale*, Supplément, 1896).

Si z est une fonction analytique de n variables $x_1, \dots, x_n$, on a entre les dérivées de z des relations de la forme

$$(a) \quad d \frac{\partial^k z}{\partial x_1^{z_1} \dots \partial x_n^{z_n}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^{k+1} z}{\partial x_1^{z_1} \dots \partial x_i^{z_i+1} \dots \partial x_n^{z_n}} dx_i \quad (z_1 + \dots + z_n = k).$$

On peut considérer les quantités $x_1, \dots, x_n, z, \frac{\partial^k z}{\partial x_1^{z_1} \dots \partial x_n^{z_n}}$ (k variant de 0 à p) comme des variables indépendantes; on appelle *élément d'ordre p de l'espace à $n+1$ dimensions* tout système de valeurs attribuées à ces lettres.

Deux éléments infiniment voisins qui vérifient ces relations sont dits *unis*.

Tout système d'équation entre les coordonnées d'un élément qui vérifie les équations (a) définit une multiplicité M^p ; dans chacun de ces systèmes, il y a quelques relations entre $x_1, \dots, x_n, z$ seulement, qui définissent une multiplicité ponctuelle, dite le *support* de M^p .

Il y a des multiplicités M^p telles qu'à chaque point du support ne correspond qu'un élément d'ordre p ; si q est le nombre des dimensions du support, nous les appellerons les *multiplicités M_q^p* .

1. Considérons d'abord une équation aux dérivées partielles linéaire par rapport aux dérivées du second ordre; soit

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ik} p_{ik} + \varphi = 0 = \Phi, \quad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad p_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k},$$

où les A_{ik} et φ sont des fonctions données de $x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n$ une telle équation.

On sait, d'après les théorèmes généraux de Cauchy sur l'existence des intégrales dans les systèmes différentiels, que toute intégrale analytique de cette équation peut être définie en se donnant une multiplicité M_{n-1}^1 qu'elle doit contenir; les équations suivantes

$$(2) \quad \frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i + p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

où z, x_n et p_n sont des fonctions arbitraires de $x_1, \dots, x_{n-1}$, représentent une multiplicité M_{n-1}^1 .

Pour calculer les dérivées secondes en fonction de $x_1, \dots, x_{n-1}$, il faut faire usage des formules

$$(3) \quad \frac{\partial p_\rho}{\partial x_i} = p_{\rho i} + p_{\rho n} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \quad \left(\begin{matrix} \rho = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, \dots, n-1 \end{matrix} \right),$$

d'où l'on déduit

$$(4) \quad p_{\rho n} = \frac{\partial p_n}{\partial x_\rho} - p_{nn} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho},$$

$$(5) \quad p_{\rho i} = \frac{\partial p_\rho}{\partial x_i} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial p_n}{\partial x_\rho} + p_{nn} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho};$$

en portant dans l'équation proposée (1) on obtient finalement

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \Lambda_{\rho i} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} - \sum_{\rho=1}^{n-1} \Lambda_{\rho n} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} + \Lambda_{nn} \right) p_{nn} \\ & + \sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \Lambda_{\rho i} \left(\frac{\partial p_\rho}{\partial x_i} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial p_n}{\partial x_\rho} \right) - \sum_{\rho=1}^{n-1} \Lambda_{\rho n} \frac{\partial p_n}{\partial x_\rho} + \varphi = 0. \end{aligned}$$

Pour qu'il y ait indétermination on doit avoir

$$(6) \quad \sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \Lambda_{\rho i} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} - \sum_{\rho=1}^{n-1} \Lambda_{\rho n} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} + \Lambda_{nn} = 0,$$

$$(7) \quad \sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \Lambda_{\rho i} \left(\frac{\partial p_\rho}{\partial x_i} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial p_n}{\partial x_\rho} \right) - \sum_{\rho=1}^{n-1} \Lambda_{\rho n} \frac{\partial p_n}{\partial x_\rho} + \varphi = 0.$$

Je donnerai le nom de *multiplicités singulières* M_{n-1}^1 aux multiplicités définies par les équations (2), (6) et (7). Il est facile de voir, en restant dans les circonstances générales, quel est leur degré de généralité. Si l'on choisit en effet x_n arbitrairement en fonction de $x_1, \dots, x_{n-1}$, l'équation (6) permettra d'obtenir p_n , et par suite $p_1, \dots, p_{n-1}$; en remplaçant, dans l'équation (7), ces lettres par leurs valeurs, on aura une équation aux dérivées partielles du second ordre et linéaire pour définir φ .

Si l'on connaît une surface intégrale de l'équation (1), les supports des multiplicités singulières placées sur cette surface intégrale sont définis par l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (6), et les orientations d'éléments du premier ordre de ces

multiplicités singulières par l'équation (7); ces deux équations ont, comme il est facile de le voir, les mêmes caractéristiques.

Nous verrons prochainement que ces caractéristiques ont une grande importance.

2. J'effectue maintenant un changement de variables laissant $x_1, \dots, x_{n-1}$ inaltérées, mais tel que x_n devienne une fonction de $x_1, \dots, x_{n-1}$ et de la nouvelle variable y ; j'aurai les formules (2), (3) et

$$(9) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = p_n \frac{\partial x_n}{\partial y}, \quad \frac{\partial p_\rho}{\partial y} = p_{\rho n} \frac{\partial x_n}{\partial y},$$

d'où les conditions d'intégrabilité

$$(9) \quad \frac{\partial p_{\rho i}}{\partial y} = \frac{\partial p_{\rho n}}{\partial x_i} \frac{\partial x_n}{\partial y} - \frac{\partial p_{\rho n}}{\partial y} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \quad \left(\rho = 1, 2, \dots, n-1 \right).$$

J'en déduis les relations

$$(10) \quad \frac{\partial p_{\rho i}}{\partial y} = \frac{\partial p_{\rho n}}{\partial x_i} \frac{\partial x_n}{\partial y} - \frac{\partial p_{nn}}{\partial x_\rho} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial x_n}{\partial y} + \frac{\partial p_{nn}}{\partial y} \frac{\partial x_n}{\partial y} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho}.$$

Dans ces conditions, $z, x_n, p_1, \dots, p_n$ sont des fonctions de $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ et de y ; je détermine le changement de variables de telle sorte que ces fonctions représentent une multiplicité singulière M_{n-1}^1 quelle que soit la valeur attribuée à y . Supposons que l'on ait une multiplicité singulière pour $y = y_0$; l'équation (1) est alors vérifiée; je vais écrire que la dérivée de son premier membre par rapport à y est nul.

Pour simplifier les notations, je poserai

$$\frac{d}{dx_n} = \frac{\partial}{\partial x_n} + \frac{\partial}{\partial z} p_n + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p_i} p_{in}.$$

J'aurai alors, en tenant compte des équations (9) et (10),

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial p_{nn}}{\partial y} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\rho=1}^{n-1} \Lambda_{\rho i} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} - \sum_{\rho=1}^{n-1} \Lambda_{\rho n} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} + \Lambda_{nn} \right) \\ & + \frac{\partial x_n}{\partial y} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\rho=1}^{n-1} \Lambda_{\rho i} \left(\frac{\partial p_{\rho n}}{\partial x_i} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial p_{nn}}{\partial x_\rho} \right) \right. \\ & \left. + \sum_{\rho=1}^{n-1} \Lambda_{\rho n} \frac{\partial p_{nn}}{\partial x_\rho} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n p_{ik} \frac{d\Lambda_{ik}}{dx_n} + \frac{dz}{dx_n} \right] = 0 \end{aligned}$$

Le coefficient de $\frac{\partial p_{nn}}{\partial y}$ est nul par hypothèse, et comme $\frac{\partial x_n}{\partial y}$ n'est pas identiquement nul, on a

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\rho=1}^{n-1} \Lambda_{\rho i} \left(\frac{\partial p_{\rho n}}{\partial x_i} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial p_{nn}}{\partial x_{\rho}} \right) \\ &+ \sum_{\rho=1}^{n-1} \Lambda_{\rho n} \frac{\partial p_{nn}}{\partial x_{\rho}} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n p_{ik} \frac{d\Lambda_{ik}}{dx_n} + \frac{d\varphi}{dx_n}. \end{aligned} \right.$$

3. Je dis que l'équation (11) représente la condition que doit vérifier l'orientation des éléments du second ordre de toute intégrale qui contient la multiplicité M_{n-1}^1 , sur cette multiplicité singulière. Pour démontrer ce fait, je vais chercher à calculer les valeurs des dérivées du troisième ordre; je poserai auparavant la notation

$$\frac{d}{dx_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial z} p_j + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p_i} p_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1).$$

L'équation proposée, différenciée par rapport à x_j^* , donne

$$(12) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \Lambda_{ik} p_{ikj} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n p_{ik} \frac{d\Lambda_{ik}}{dx_j} + \frac{d\varphi}{dx_j} = 0.$$

Remarquons que l'on a, sur la multiplicité M_{n-1}^1 ,

$$(13) \quad \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_j} = p_{ikj} + p_{ikn} \frac{\partial x_n}{\partial x_j} \quad \left(\begin{matrix} i, k = 0, 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n-1 \end{matrix} \right);$$

ces relations permettent de calculer tous les p_{ikj} en fonction de p_{nnn} ; en portant dans l'équation (12) on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \Lambda_{ik} \left\{ \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial x_n}{\partial x_j} \left[\frac{\partial p_{nn}}{\partial x_i} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p_{nn}}{\partial x_k} - p_{nnn} \frac{\partial x_n}{\partial x_k} \right) \right] \right\} \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \Lambda_{in} \left[\frac{\partial p_{in}}{\partial x_j} - \frac{\partial x_n}{\partial x_j} \left(\frac{\partial p_{nn}}{\partial x_i} - p_{nnn} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \right) \right] \\ &+ \Lambda_{nn} \left(\frac{\partial p_{nn}}{\partial x_j} - p_{nnn} \frac{\partial x_n}{\partial y_j} \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{d\Lambda_{ik}}{dx_j} p_{ik} + \frac{d\varphi}{dx_j} = 0. \end{aligned}$$

Le coefficient de p_{nnn} dans cette équation est précisément le premier membre de l'équation (6) : il est nul, puisque nous sommes sur une multiplicité singulière M_{n-1}^1 ; le coefficient de $\frac{\partial x_n}{\partial x_j}$ est le premier membre de l'équation (11), que nous supposons vérifiée ; il reste finalement

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \Lambda_{ik} \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \Lambda_{in} \frac{\partial p_{in}}{\partial x_j} + \Lambda_{nn} \frac{\partial p_{nn}}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n p_{ik} \frac{d\Lambda_{ik}}{dx_j} + \frac{dz}{dx_j} = 0.$$

Cette équation est vérifiée, puisque les éléments du second ordre, tirés des formules (2) et (3), satisfont identiquement à l'équation proposée quand on est placé sur une multiplicité singulière. Nous avons donc établi que, si l'orientation des éléments du second ordre choisi sur la multiplicité singulière vérifie l'équation (11), il y a indétermination pour le calcul des dérivées du troisième ordre.

4. Les équations (2), (3), (6), (7) et (11) définissent une famille de multiplicités M_{n-1}^2 que j'appellerai *multiplicités singulières* M_{n-1}^2 ; si l'on adjoint les formules (13), on obtient une infinité de multiplicités M_{n-1}^3 qui vérifient l'équation proposée et ses dérivées ; mais elles ne sont pas toutes placées sur une multiplicité intégrale à n dimensions. Pour rechercher dans quelles conditions cette circonstance se présentera, je ferai un changement de variables analogue à celui qui a été employé au n° 2 ; c'est-à-dire tel que $x_n, z, p_i, p_{ik}, p_{ikj}$ étant des fonctions de $x_1, \dots, x_{n-1}$ et de la nouvelle variable y , on ait affaire à des multiplicités singulières M_{n-1}^2 quel que soit y .

Je dois adjoindre les formules

$$\frac{\partial p_{pi}}{\partial x_k} = p_{pik} + p_{pin} \frac{\partial x_n}{\partial x_k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial p_{pi}}{\partial y} = p_{pin} \frac{\partial x_n}{\partial y}.$$

Dans ces conditions, on aura

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial x_j} = 0,$$

car nos multiplicités M_{n-1}^3 vérifient identiquement les équations

(12); pour que ceci ait lieu, quel que soit y , il faut

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x_j} + \frac{\partial x_n}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n \partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \frac{\partial^2 x_n}{\partial x \partial y_j} = 0.$$

Or, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}$ est vérifié identiquement; il suffit donc que l'on ait

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n \partial y} = 0.$$

Voici ce que l'on obtient, en tenant compte des conditions d'intégrabilité :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \Lambda_{ik} \left(\frac{\partial p_{knn}}{\partial x_i} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial p_{nnn}}{\partial x_k} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \Lambda_{in} \frac{\partial p_{nnn}}{\partial x_i} \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{d\Lambda_{ik}}{dx_n} p_{ikn} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{d^2 \Lambda_{ik}}{dx_n^2} p_{ik} + \frac{d^2 \varphi}{dx_n^2} = 0, \end{array} \right.$$

où l'on pose

$$\frac{df}{dx_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial z} p_n + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} p_{in} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_{ij}} p_{ijn}.$$

L'équation (14) jointe aux équations (13) exprime la condition pour que les multiplicités M_{n-1}^3 soient contenues dans des multiplicités intégrales à n dimensions; on le vérifierait en constatant qu'il y a alors indétermination pour les éléments du quatrième ordre; nous obtenons ainsi des *multiplicités* M_{n-1}^3 *singulières*.

En opérant ainsi de proche en proche, on démontrerait l'existence de *multiplicités* M_{n-1}^p *singulières* pour toutes les valeurs de l'ordre p ; on verrait aussi que, une multiplicité singulière M_{n-1}^3 étant choisie, l'ensemble des multiplicités M_{n-1}^{p+1} qui lui correspond dépend d'une fonction arbitraire de $n - 2$ arguments.

Nous démontrerons un peu plus loin que ces multiplicités singulières contiennent bien des multiplicités intégrales, c'est-à-dire que les conditions précédentes que nous avons reconnues nécessaires sont bien suffisantes.

5. J'envisage maintenant une équation aux dérivées partielles du second ordre non linéaire; pour plus de simplicité, je supposerai qu'elle est rationnelle par rapport aux lettres qui y figurent;

soit

$$(15) \quad f(x_1, \dots, x_n, z, p_i, p_{lk}) = 0$$

cette équation. Le degré de généralité est défini de la même façon que pour les équations linéaires, c'est-à-dire par les formules (2). Pour calculer les dérivées du second ordre, nous ferons usage des formules (3); pour qu'il y ait indétermination il faut que

$$(16) \quad \sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{\rho i}} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial x_n}{\partial x_{\rho}} - \sum_{\rho=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{\rho n}} \frac{\partial x_n}{\partial x_{\rho}} + \frac{\partial f}{\partial p_{nn}} = 0;$$

mais cette condition, qui est nécessaire, n'est plus suffisante. Si l'équation (16) ne renferme plus p_{nn} , la discussion s'achève comme pour les équations linéaires; nous supposons donc qu'il n'en est pas ainsi.

Les équations (2), (3), (15) et (16) définissent une famille de multiplicités M_{n-1}^2 ; mais ces multiplicités ne sont pas toutes placées sur des multiplicités intégrales à n dimensions de l'équation proposée. Pour reconnaître dans quels cas cela aura lieu, nous ferons encore usage du changement de variables qui nous a été si utile, et nous trouvons, par un calcul que j'ometts, que l'on doit avoir

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum \frac{\partial f}{\partial p_{\rho}} p_{\rho n} + \frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial z} p_n \\ & + \sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{\rho i}} \left(\frac{\partial p_{\rho n}}{\partial x_{1i}} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial p_{nn}}{\partial x_{\rho}} \right) + \sum_{\rho=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_{\rho n}} \frac{\partial p_{nn}}{\partial x_{\rho}} = 0. \end{aligned} \right.$$

Les équations (2), (3), (15), (16) et (17) définissent une famille de multiplicités que j'appellerai les *multiplicités singulières* M_{n-1}^2 . On vérifierait tout à fait de la même manière que plus haut l'indétermination dans le calcul des dérivées du troisième ordre, et l'on démontrerait l'existence de *multiplicités singulières* M_{n-1}^p pour toutes les valeurs de p .

Une multiplicité M_{n-1}^p singulière étant donnée, les multiplicités singulières M_{n-1}^{p+1} qui lui correspondent dépendent d'une fonction arbitraire de $n - 2$ arguments.

6. Il me reste maintenant à établir que, étant donnée une mul-

tiplicité singulière M_{n-1}^2 , il y a bien une infinité de multiplicités intégrales à n dimensions qui la contiennent ⁽¹⁾. Je puis toujours effectuer un changement de variables tels que le support de cette multiplicité singulière ait pour équations

$$z = 0, \quad x_n = 0;$$

on a par suite

$$p_1 = 0, \quad \dots, \quad p_n = 0, \quad p_n = f(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

$$p_{\rho i} = 0 \quad (\rho, i = 1, 2, \dots, n-1), \quad p_{ni} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad p_{nn} = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

et si l'on pose

$$z = z' + x_n f + \frac{x_n^2 \varphi}{z},$$

on est ramené à

$$z = 0, \quad x_n = 0, \quad p_i = 0, \quad p_{ik} = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Comme on a affaire à une multiplicité singulière, les équations (16) et (17) doivent être vérifiées, ainsi que les équations obtenues en différentiant l'équation proposée par rapport à $x_1 \dots x_{n-1}$; on a donc

$$\frac{\partial f}{\partial p_{nn}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

pour les valeurs précédentes des arguments. On peut donc mettre l'équation proposée sous la forme

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} p_{nn-1} &= \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n p_n \\ &+ \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{k=1}^{n-2} \alpha_{ik} p_{ik} + \sum_{i=1}^{n-2} \beta_i p_{ni} + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i p_{n-1i} + \dots, \end{aligned} \right.$$

les termes non écrits étant de degré supérieur; en remplaçant même x_{n-1} par $x_{n-1} + \lambda x_n$ on peut faire disparaître le terme en $p_{n-1, n-1}$. Avant d'aller plus loin, je vais démontrer le théorème suivant :

Étant donnée l'équation

$$p_{nn-1} = F(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n, p_{n1}, \dots, p_{nn-2}, p_{ik}, p_{nn}),$$

⁽¹⁾ Je me suis inspiré, pour cette démonstration, de la méthode indiquée par M. Goursat (*Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, p. 188).

telle que $\frac{\partial F}{\partial p_{nn}}$ et $\frac{\partial F}{\partial p_{n-1n-1}}$ sont nulles pour les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0, \dots, x_n = x_n^0, \\ z_0 &= \psi_1(x_1^0, \dots, x_{n-2}^0) \quad p_i^0 = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} \right)_0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-2), \\ p_{n-1}^0 &= \psi_2^0, \quad p_n^0 = \varphi_2^0, \\ p_{ik}^0 &= \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_i \partial x_k} \right)_0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, n-2), \\ p_{n-1i}^0 &= \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} \right)_0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-2), \quad p_{ni}^0 = \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \right)_0, \\ p_{n-1n-1}^0 &= \psi_3^0, \quad p_{nn}^0 = \varphi_3^0, \end{aligned}$$

elle admet une intégrale holomorphe dans le voisinage de $x_1 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0$, qui se réduit à

$$\begin{aligned} \Psi &= \psi_1(x_1, \dots, x_{n-2}) + (x_{n-1} - x_{n-1}^0) \psi_2(x_1, \dots, x_{n-2}) + \dots \\ &\quad \text{pour } x_n = x_n^0, \\ \Phi &= \psi_1(x_1, \dots, x_{n-2}) + (x_n - x_n^0) \varphi_2(x_1, \dots, x_{n-2}) + \dots \\ &\quad \text{pour } x_{n-1} = x_{n-1}^0. \end{aligned}$$

On peut, sans inconvénient, supposer que toutes les données initiales sont nulles ; il suffirait pour cela de poser

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^0 + x_i', \\ z &= z' + \psi_1(x_1, \dots, x_{n-2}) + (x_{n-1} - x_{n-1}^0) \psi_2 + \dots + (x_n - x_n^0) \varphi_2 + \dots \end{aligned}$$

Il résulte de là que, si l'on calcule de proche en proche les valeurs des dérivées successives pour $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$, on aura, par hypothèse,

$$\begin{aligned} p_{ijk}^0 &= 0, \quad p_{nnn, \dots, nij k, \dots}^0 = 0, \quad p_{n-1n-1, \dots, n-1ijk, \dots}^0 = 0 \\ &\quad (i, j, k, \dots, \leq n-2). \end{aligned}$$

L'équation proposée donne ensuite tous les $p_{nn-1,ijk,\dots}$ en différentiant par rapport à $x_1, \dots, x_{n-2}$; l'absence de termes du premier degré en p_{nn} et p_{n-1n-1} permet de calculer sans ambiguïté les termes en p_{nnn-1} , $p_{nn-1n-1}$ et, par suite, aussi les termes en $p_{nnn-1,ijk,\dots}$, $p_{nn-1,n-1,ijk,\dots}$ et ainsi de suite.

Pour démontrer la convergence du développement ainsi obtenu, j'emploierai la méthode des fonctions majorantes et je considé-

rerai l'équation auxiliaire suivante :

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} p_{nn-1} = & \frac{M}{\left(1 - \frac{x_1 + \dots + x_n + z + p_1 + \dots + p_n}{\rho} \right) \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{k=1}^{n-2} p_{ik}}{R} \right)} \\ & \times \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-2} p_{ni}}{R} \right) \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-2} p_{n-1i}}{R} \right) \left(1 - \frac{p_{nn} + p_{n-1n-1}}{R} \right) \\ & - M \left(1 + \frac{p_{nn} + p_{n-1n-1}}{R} \right). \end{aligned} \right.$$

ρ et R étant les rayons des cercles de convergence de F pour les lettres correspondantes, et M le module maximum de F . Le second membre est manifestement une fonction majorante pour F ; il suffit donc d'établir la convergence pour cette équation; pour cela, je poserai

$$x_1 + \dots + x_{n-2} = u, \quad x_{n-1} + x_n = v.$$

L'équation (18) devient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{M}{\left(\frac{1 - (n-2)u + 2v + z + (n-2) \frac{\partial z}{\partial u} + 2 \frac{\partial z}{\partial v}}{\rho} \right) \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{k=1}^{n-2} p_{ik}}{R} \right) \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-2} p_{ni}}{R} \right) \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-2} p_{n-1i}}{R} \right) \left(1 - \frac{p_{nn} + p_{n-1n-1}}{R} \right) - M \left(1 + \frac{p_{nn} + p_{n-1n-1}}{R} \right)}.$$

ou encore

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = M \left[\frac{(n-1)n}{2R} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{2(n-2)}{R} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \right] + \left(\frac{4M}{R^2} + \frac{2}{R} \right) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right)^2 + \dots,$$

les termes non écrits étant, ou bien d'ordre inférieur à 2, ou bien de degré supérieur à 1 s'ils sont d'ordre égal ou supérieur à 2.

Cette équation admet une intégrale holomorphe telle que z et $\frac{\partial z}{\partial v}$

se réduisent à 0 pour $v = 0$; dès lors, on aura

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^k z}{\partial u^k} &= 0 \\ \frac{\partial^{k+1} z}{\partial u^k \partial v} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{pour} \quad u = 0, \quad v = 0 \quad \text{quel que soit } k,$$

on pourra calculer sans ambiguïté les valeurs de $\frac{\partial^k z}{\partial u^{k-2} \partial v^2}$ puis la valeur de $\frac{\partial^3 z}{\partial v^3}$, et ainsi de suite, comme il est aisé de le reconnaître; *et tous les coefficients obtenus seront positifs*; il en résulte immédiatement que le développement donné par l'équation (19) est convergent, ainsi que celui fourni par l'équation proposée.

Je reviens maintenant à l'équation (18) qui est l'objet principal de ce paragraphe; l'application du théorème précédent se fait immédiatement. Il y a une intégrale holomorphe qui se réduit à zéro pour $x_n = 0$ et à

$$x_n^3 \varphi_3 + x_n^4 \varphi_4 + \dots,$$

pour $x_{n-1} = 0$; $\varphi_3, \varphi_4, \dots$ étant des fonctions arbitraires de $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$. On reconnaît que

$$\begin{aligned} p_{i,j,k,\dots}^0 &= 0 \quad \text{pour} \quad x_1 = 0, \quad \dots, \quad x_n = 0, \\ p_{n-1,n-1,\dots,n-1,ijk,\dots}^0 &= 0, \end{aligned}$$

et comme, d'autre part, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0, \quad x_n = 0, \quad p_i = 0, \quad p_{ik} = 0,$$

on en déduit

$$p_{nn-1,ijk,\dots}^0 = 0.$$

Il en résulte que cette intégrale holomorphe, développée suivant les puissances de x_n , ne contiendra que des termes du troisième degré; *il y a donc une infinité d'intégrales contenant la multiplicité singulière M_{n-1}^3* .

Les fonctions arbitraires $\varphi_3, \varphi_4, \dots$ correspondent précisément aux fonctions arbitraires qui entrent dans la définition des multiplicités singulières $M_{n-1}^3, M_{n-1}^4, \dots$.

CONCLUSIONS.

Étant donnée l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$f(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n, p_{ik}) = 0,$$

une intégrale de cette équation est définie en général par une multiplicité M_{n-1}^1 ; il y a exception si la multiplicité est singulière, c'est-à-dire si les équations

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i + p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial p_\rho}{\partial x_i} = p_{\rho i} + p_{\rho n} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \quad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \rho = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \right),$$

$$\sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} - \sum_{\rho=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{\rho n}} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} + \frac{\partial f}{\partial p_{nn}} = 0,$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{\rho i}} \left(\frac{\partial p_{\rho n}}{\partial x_i} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \frac{\partial p_{nn}}{\partial x_\rho} \right) \\ & + \sum_{\rho=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial p_{\rho n}} \frac{\partial p_{nn}}{\partial x_\rho} + \sum_{\rho=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_\rho} p_{\rho n} + \frac{\partial f}{\partial z} p_n + \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \\ & f = 0 \end{aligned}$$

sont vérifiées.

On obtient alors une multiplicité singulière M_{n-1}^2 qui est contenue dans une infinité d'intégrales.

A tout ordre p correspondent des multiplicités singulières M_{n-1}^p jouissant de la même propriété.

A toute multiplicité singulière M_{n-1}^p correspondent une infinité de multiplicités singulières M_{n-1}^{p+1} dépendant d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre; par suite, si deux multiplicités singulières M_{n-1}^p correspondent à la même multiplicité singulière M_{n-1}^{p-1} , et si elles ont un élément d'ordre p commun en un point, il en sera de même tout le long d'une courbe passant par ce point.

QA Société mathématique de
l France, Paris
S59 Bulletin
t. 24-25
Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY
